Пусть X – одно из трех пространств постоянной кривизны: евклидово пространство $\mathbb{E}^n$, сферическое пространство $\mathbb{S}^n$ или пространство Лобачевского $\mathbb{L}^n$, и пусть Isom X — группа движений пространства X. Семейство подмножеств пространства X называется локально конечным, если у каждой точки существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом подмножеств из этого семейства. Подгруппа $\Gamma \subset \mathrm{Isom}\ X$ называется дискретной группой движений, если для всякой точки $x \in X$ семейство $\{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$ локально конечно. Разбиением пространства X называется его локально конечное покрытие замкнутыми областями, не имеющими попарно общих внутренних точек. Замкнутая область $D \subset X$ называется фундаментальной областью дискретной группы движений $\Gamma \subset \mathrm{Isom}\ X$, если подмножества γD, где $\gamma \in \Gamma$, составляют разбиение пространства X. Известно, что фундаментальная область является обобщенным выпуклым многогранником.

Примерами дискретных групп движений являются группы параллельных переносов в евклидовом пространстве, группа симметрий кристаллов, а также дискретные группы, порожденные отражениями (так называемые группы отражений). Если рассмотреть гиперболическую решетку L – свободную абелеву группу, снабженную целочисленной симметрической билинейной формой f сигнатуры $(n, 1)$, то можно считать ее вложенной в пространство Минковского $\mathbb{E}^{n,1} = L \otimes \mathbb{R}$, причем одна из связных компонент гиперболоида $C = x \in \mathbb{E}^{n,1} : f(x, x) = -1$ является векторной моделью пространства Лобачевского $\mathbb{L}^n$. Пусть $O'(L)$ – группа автоморфизмов гиперболической решетки, не меняющих местами связные компоненты гиперболоида C. Известно, что группа $O'(L)$ является дискретной группой движений пространства Лобачевского, и ее фундаментальный многогранник имеет конечный объем.

Группы отражений выделяются среди дискретных групп движений простотой своего описания, возможностью нахождения всех определяющих соотношений, а также тесно связаны с очень многими алгебраическими и геометрическими структурами. Если подгруппа $O_r(L)$, порожденная всеми отражениями, содержащимися в $O'(L)$, является подгруппой конечного индекса, то решетка L называется рефлективной. Это равносильно тому, что группа $O_r(L)$ является кристаллографической (или ко-конечной) группой отражений, то есть ее фундаментальный многогранник имеет конечный объем. Рефлективные гиперболические решетки связаны со многими современными исследованиями. Известно, что имеется лишь конечное число таких решеток, что делает задачу их классификации вполне осмысленной.

В докладе будет рассказано об основных этапах развития теории гиперболических групп отражений, методах работы с ними и о классификации рефлективных гиперболических решеток, в частности, о недавнем результате докладчика (см., например, https://arxiv.org/abs/1610.06148).