Спектральные свойства графов гиперболических случайных блужданий в полях Галуа мощности 3^n

М. Д. Мартинсон

Московский Физико-Технический Институт, ФИВТ

Кафедра дискретной математики

mmartinson@yandex.ru

Аннотация

Цель нашей работы — изучить аналитические свойства графов действий на конечных пространствах, отвечающих конечно-порождённым группам мигающих лампочек $\mathscr{L}_p$. Данная задача находится на стыке теории групп, функционального анализа и комбинаторики. Для характеристи $p=2$ установлено, что все графы действий со свойством транзитивности максимальной абелевой подгруппы изоморфны между собой и изоморфны классическим графам де Брёйна, но порождают различные структуры на этих графах. В частности, все графы в этом классе спектрально эквивалентны. Мы проводим исследование графов, индуцируемых на пространствах малой мощности, для характеристики $p=3$ и доказываем, что упомянутый эффект сохраняется.

Введение

В работе исследуются спектральные свойства оператора Лапласа на графе, индуцированном гиперболическим действием группы $\mathscr{L}_3$ (группа Lamplighter характеристики 3),

$$\mathscr{L}_p = \langle a, s \ \mid \ s^p = 1, \ [s^{a^i}, s^{a^j}] = 1 \rangle, \qquad i, j \in \mathbb{Z},$$

на конечном поле Галуа мощности 3^n, а именно, рассматривается симметрическое случайное блуждание на конечном поле $\mathbb{F}_{3^n}$, порожденное семейством аффинных преобразований $a_k(x) = mx + k\alpha$, где $k \in \mathbb{F}_p$, $m, \alpha \in \mathbb{F}_{3^n}$. Такие динамические системы изучаются в теории групп (см. [1–5]) в связи с вычислением спектральных характеристик графов Кэли конечно-порожденных аменабельных групп. При исследовании самоподобных фрактальных групп, таких, как классическая группа мигающих лампочек $\mathscr{L}_2$, было обнаружено следующее парадоксальное поведение оператора Лапласа: экспоненциальные показатели диффузии для собственных функций при аппроксимации графа Кэли большими конечными графами, не стремятся к непрерывному спектральному распределению, как это происходит в случае однородного уравнения теплопроводности на вещественной прямой $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 0$, а стабилизируются на дискретном множестве значений. Иными словами, оператор случайного блуждания имеет дискретный спектр. В работе [1] этот дискретный спектр вычислен для графа Кэли группы $\mathscr{L}_2$, затем, в работах [2, 3] вычислен спектр для групп $\mathscr{L}_p$ в общем случае, имеющий структуру

$$\Lambda = \left\{ \cos \frac{m}{N}\pi \ : \ N \geq 2, \ 1 \leq m \leq N-1 \right\}.$$

В то же время, представляет интерес нахождение явного вида спектра случайного блуждания для конечных графов Шрейера, а также для действий групп $\mathscr{L}_p$, особенно в области $p > 2$.

Графы гиперболических аффинных действий $\mathscr{L}_3$

Цель нашей работы — произвести элементарное исследование аффинных случайных блужданий на графах малой мощности для характеристики $p = 3$.

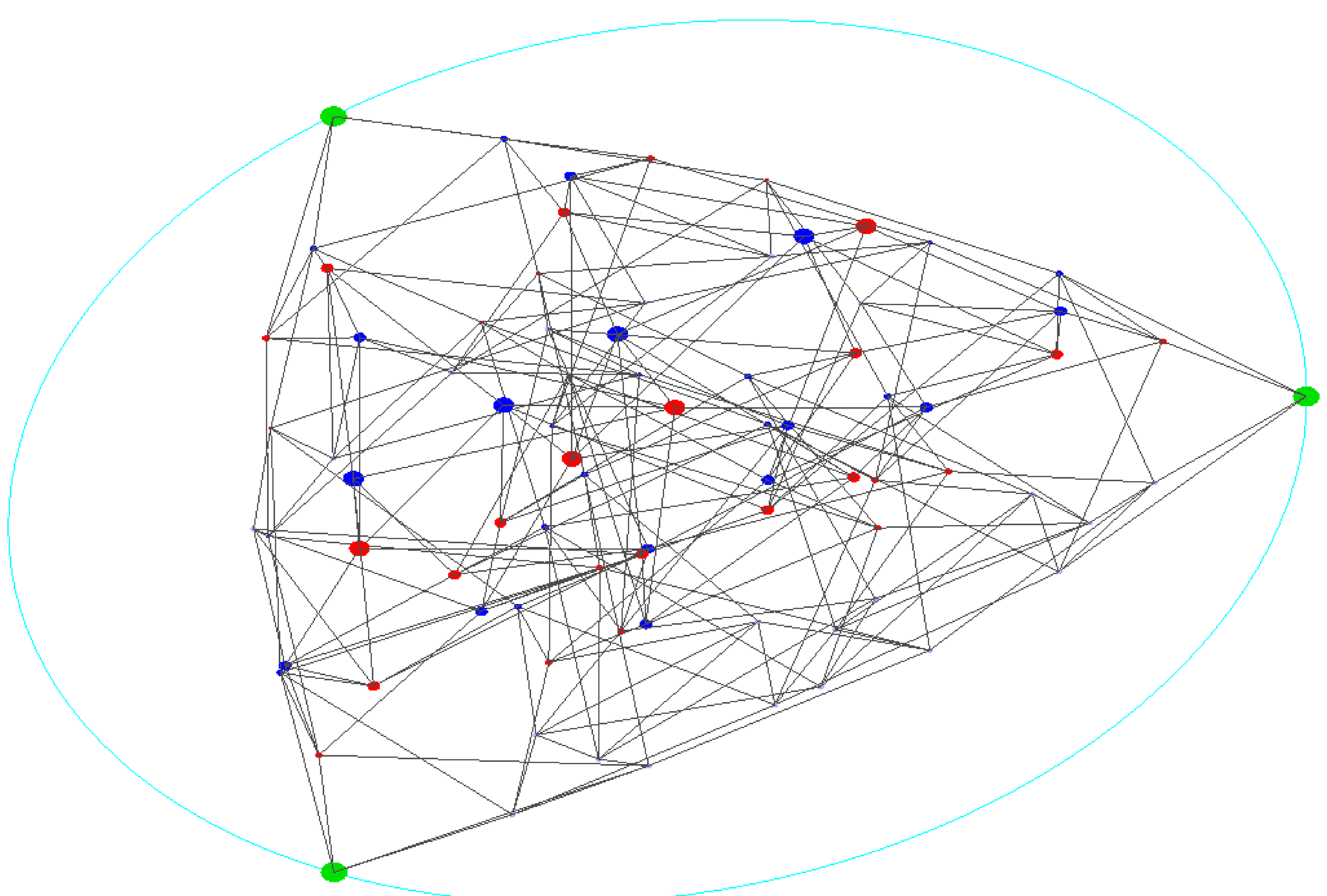

Рис. 1: На рисунке изображён граф действия $\mathscr{L}_3$: $\mathbb{F}_{81}$, а также собственная функция оператора M, отвечающая $\lambda = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (стационарное квантовое состояние).

Главная модель: действие в поле Галуа $\mathbb{F}_{3^n}$

Конечное поле Галуа определяется, как результат факторизации кольца полиномов $\mathbb{Z}_3[t]$ по идеалу, порождённому неприводимым полиномом $P_0(t)$. Мы рассматриваем действия группы $\mathscr{L}_3$, индуцированные семейством аффинных преобразований

$$\begin{aligned} a_0 &: \ x \mapsto mx, \\ a_1 &: \ x \mapsto mx + \alpha, \\ a_2 &: \ x \mapsto mx + 2\alpha, \end{aligned}$$

где m — показатель Ляпунова действия.

Определение. Аффинное преобразование $x \mapsto mx + \alpha$ (и включающее его действие) в поле $\mathcal{F}$ будем называть гиперболическим типа II, если $m \neq 0$, 1 и $\langle m \rangle = \mathcal{F}$, то есть минимальное подполе, содержащее m совпадает со всем полем $\mathcal{F}$.

Спектр оператора Лапласа

Пусть $\Gamma = (V, E)$ — конечный ориентированный граф. Оператором случайного блуждания на графе Γ будем называть линейный оператор, действующий в пространстве функций на вершинах графа по правилу

$$Mf(u) = \frac{1}{r(u)} \sum_{v \to u} f(v), \qquad u \in V,$$

где $r(u)$ — число рёбер, входящих в вершину u. Оператор Лапласа отличается от оператора M на константу: $\Delta = M - \mathbf{1}$.

Теорема 1. Все операторы Лапласа невырожденных (гиперболических) аффинных действий группы $\mathscr{L}_3$ на $\mathbb{F}_3^n$ спектрально эквивалентны для $n = 2, 3, 4$.

Теорема 2. Спектры Λ_n образуют возрастающую цепочку для $n = 2, 3, 4$:

$$\Lambda_2 = \{1, \ \pm\frac{1}{2}^{(2)}, \ 0^{(4)}\},$$

$$\Lambda_3 = \{1, \ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}^{(2)}, \ \pm\frac{1}{2}^{(4)}, \ 0^{(14)}\},$$

$$\Lambda_4 = \{1, \ \pm\frac{\sqrt{5}-1}{2}^{(2)}, \ \pm\frac{\sqrt{5}+1}{2}^{(2)}, \ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}^{(4)}, \ \pm\frac{1}{2}^{(12)}, \ 0^{(40)}\}.$$

Теорема 3. Среди графов действия группы $\mathscr{L}_3$ на $\mathbb{F}_9$ есть графы, изоморфные лишь в слабом смысле (пример).

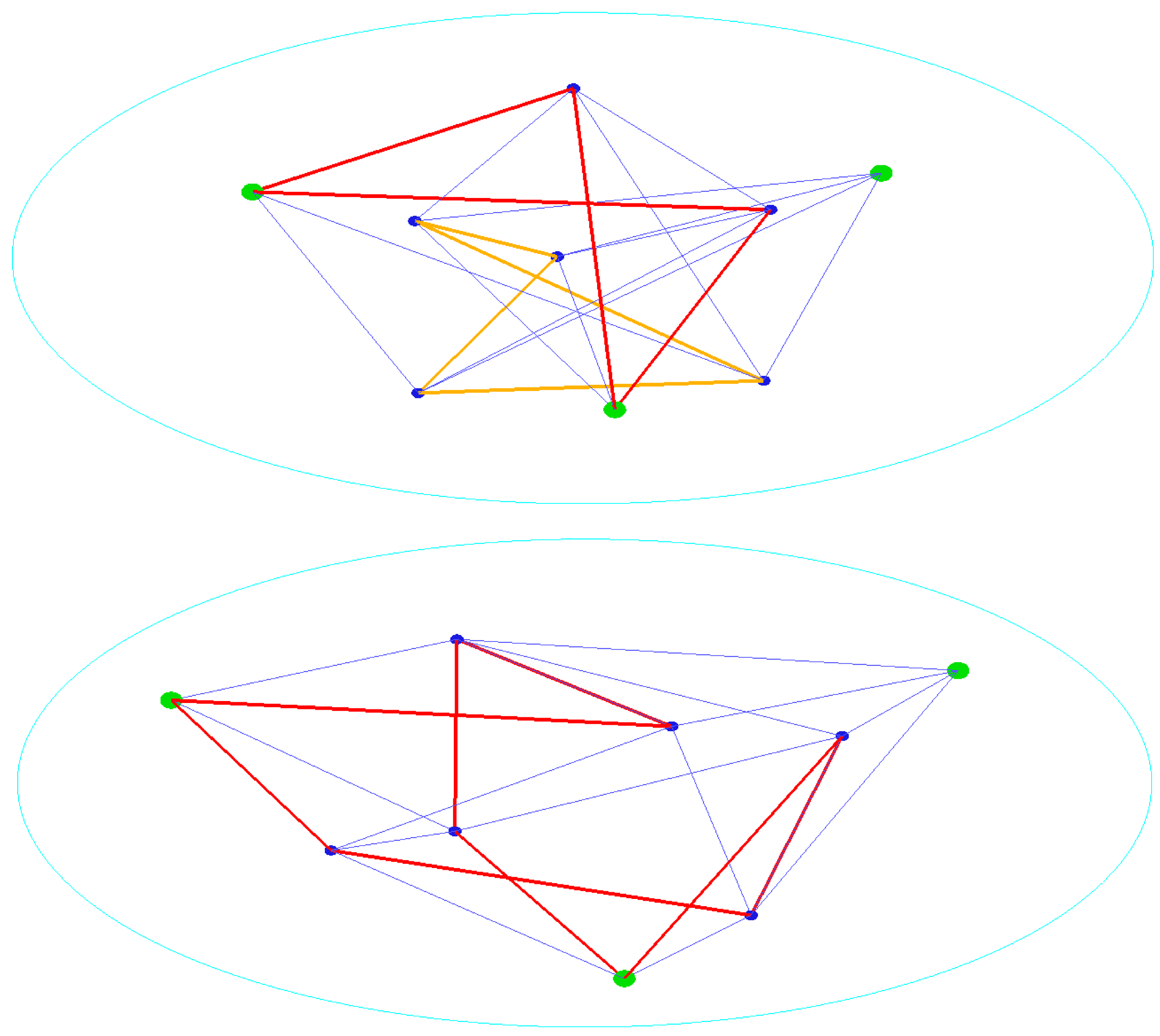

Рис. 2: Иллюстрация к теореме 3: Два неизоморфные в сильном смысле графа действия $\mathscr{L}_3$: $\mathbb{F}_9$. Автоморфизмы T_0 имеют разную цикловую структуру.

Эффект конденсации спектра

Спектральные распределения стабилизируются на дискретном множестве значений. Таким образом, асимптотический спектр оператор случайного блуждания является дискретным. Исследование для систем с характеристикой $p = 2$ проведено в работе [5].

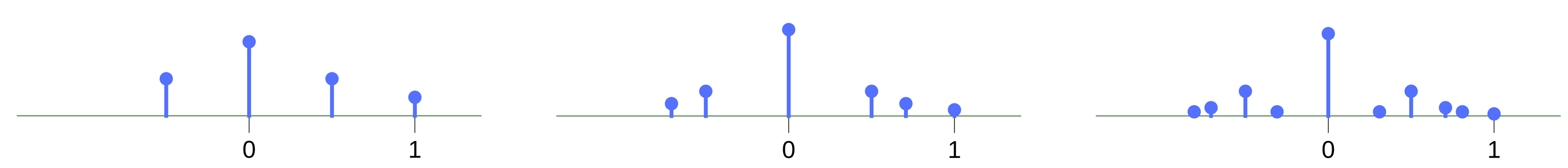

Рис. 3: На рисунке отображены спектральные распределения для операторов случайных блужданий в полях $\mathbb{F}_9$, $\mathbb{F}_{27}$, $\mathbb{F}_{81}$.

Будущие исследования

В перспективе исследование будет продолжено в направлении доказательства или опровержения гипотезы о спектральном изоморфизме всех графов действий (с условием транзитивности максимальной абелевой подгруппы). Разработанные медоты моделирования и вычислительные методы будут также использованы для изучения динамических систем и клеточных автоматах на графах Кэли и Шрейера конечно-порождённых групп.

Автор благодарен А.А. Приходько за постановку задачи и содействие в создании визуальных моделей.

Список литературы

[1] Р.И. Григорчук, В.В. Некрашевич, В.И. Сущанский. Автоматы, динамические системы и группы. Динамические системы, автоматы и бесконечные группы, Сборник статей. Тр. МИАН, 231, Наука, М., 2000, 134–214.

[2] R.I. Grigorchuk, A. Zuk. The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton, and its spectrum. Geom. Dedicata, 87 (2001), 209–244.

[3] W. Dicks, Th. Schick. The spectral measure of certain elements of the complex group ring of a wreath product. Geom. Dedicata, 93 (2002), 121–137.

[4] L. Bartholdi, W. Woess. Spectral computations on lamplighter groups and Diestel-Leader graphs. J. Fourier Anal. Appl. 11 (2005), no. 2, 175–202.

[5] A.C. Balram, D. Dhar. Non-perturbative corrections to mean-field behavior: spherical model on spider-web graph. ArXiv:1111.0741, 1–17.