# Задачи по курсу случайных графов. Часть 6

1. Пусть $X_n$ равно либо $\omega(G(n,p))$, либо $\alpha(G(n,p))$, либо $\chi(G(n,p))$. Докажите, что тогда для любого $\delta > 0$ выполнено
$$\frac{X_n - \mathsf{E}X_n}{n^{1/2+\delta}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

2. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая величина $d_\varepsilon > 0$, что при $d_\varepsilon < np = o(n)$ выполнено
$$\mathsf{P}\left(\alpha(G(n,p) \leqslant \frac{2}{p}\left(\ln(np) - \ln\ln(np) - \ln 2 + 1 + \varepsilon\right)\right) \to 1.$$

3. Граф $G$ называется *$k$-вырожденным*, если любой его подграф содержит вершину степени не более $k$. Обозначим через $D(G)$ минимальное такое $k$, что $G$ является $k$-вырожденным. Докажите, что
$$\chi(G) \leqslant D(G) + 1 \leqslant 2m(G) + 1.$$

4. С помощью точных оценок в неравенстве Чернова докажите следующие оценки числа ребер в малых подграфах случайного графа. С вероятностью, стремящейся к 1,

   (a) при $np \geqslant C_0$ для подходящей константы $C_0$ любой подграф $F \subset G(n,p)$ на не более чем $n/(2(\ln np)^2)$ вершинах удовлетворяет неравенству $m(F) \leqslant np/(\ln np)^2$;

   (b) при $p \leqslant (\ln n)^2/\sqrt{n}$ любой подграф $F \subset G(n,p)$ на не более чем $2\sqrt{n \ln n}$ вершинах удовлетворяет неравенству $m(F) \leqslant (\ln n)^3$;

   (c) при $p \leqslant n^{-6/7}$ любой подграф $F \subset G(n,p)$ на не более чем $70\sqrt{n \ln n}$ вершинах удовлетворяет неравенству $m(F) \leqslant 1.45$.

5. Докажите, что при $np \leqslant 1.001$ с вероятностью, стремящейся к 1, любой подграф $F \subset G(n,p)$ удовлетворяет неравенству $m(F) \leqslant 1.45$. И, значит,
$$\mathsf{P}\left(\chi(G(n,p)) \leqslant 3\right) \to 1.$$

6. Пусть $np = c > 1$ — фиксировано. С помощью неравенства Янсона докажите, что тогда с вероятностью $1 - o(1/\ln n)$ случайный граф содержит цикл длины $2\lfloor \ln\ln n \rfloor + 1$.

7. Докажите, что свойство двудольности случайного графа имеет пороговую вероятность, которая точна только с одной стороны.

8. Пусть $r \geqslant 3$ — фиксированное натуральное число. Докажите, что для любого постоянного $c > 2r \ln r - \ln r$ случайный граф $G(n, c/n)$ не является $r$-раскрашиваемым с большой вероятностью, т.е. выполнено

$$\mathsf{P}\left(\chi(G(n, c/n)) > r\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

**СРОК СДАЧИ** понедельник, 15 мая.