

Программа курса «Случайные графы II»

лекторы — М. Е. Жуковский, Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики ФИВТ,
магистратура 10 семестр

1. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени k в случайном графе $G(n, p)$. Аналогичные теоремы для числа вершин степени не менее (не более) k . Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе $G(n, p)$.
2. Связность случайного графа $G(n, p)$. Теорема о предельной вероятности связности $G(n, p)$ при условии $p = (\ln + c + o(1))/n$. Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности $G(n, p)$. Следствия из этой теоремы: точная пороговая вероятность для свойства отсутствия изолированных вершин, пороговая функция для связности случайного графа $G(n, m)$.
3. Графовый случайный процесс $(\tilde{G}(m), m = 0, \dots, \binom{n}{2})$, случайные моменты первого появления монотонно возрастающих свойств. Вершинная и реберная k -связность графов, сепараторы в графах. Лемма о сепараторах в $G(n, p)$. Теорема об одновременном наступлении k -связности и отсутствии вершин степени меньше k в графовом случайном процессе \tilde{G} .
4. Совершенные паросочетания в случайном графе. Точная пороговая вероятность появления в случайном графе $G(n, p)$ совершенного паросочетания.
5. Пути и маршруты в графах. Теорема Комлоша–Семереди о длине максимального пути в случайном графе $G(n, p)$. Понятие случайного двухцветного мультиграфа $G(n, r, r)$, алгоритм поиска пути в цветном мультиграфе, его формальное описание.
6. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поша. Три леммы о наличии свойства $|U \cup \Gamma(U)| \geq 3|U|$ для малых подмножеств U в случайном графе $G(n, p)$.
7. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа $G(n, p)$ при условии $p = (\ln n + \ln \ln n + \omega(n))/n$, где $\omega(n) \rightarrow +\infty$. Теорема о об одновременном наступлении гамильтоновости и отсутствии вершин степени меньше 2 в графовом случайном процессе \tilde{G} (б/д).

8. Неравенства концентрации в теории вероятностей. ФКГ–неравенство в простейшем случае. Неравенство Янсона, следствия из него. Неравенство Азумы–Хеффдинга для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями. Мартингалы реберного и вершинного типов в случайных графах.
9. Независимые множества в случайном графе. Число независимости $\alpha(G(n, p))$ и его асимптотическое поведение при $p = \text{const}$. Поведение числа независимости в динамической модели случайного графа $G(\mathbb{N}, p)$.
10. Раскрашиваемость случайного графа. Оценка вероятности отсутствия множества независимости большого размера в случайного графа $G(n, p)$ с помощью неравенства Янсона. Теорема об асимптотическом поведении хроматического числа $\chi(G(n, p))$ для случая $p = \text{const}$. Теорема Лучака об оценках хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ в общем случае (б/д).
11. Теорема о концентрации хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ в двух точках при $p \leq n^{-6/7}$.
12. Независимые множества $G(n, p)$ в случае $p = c/n$. Метод интерполяции и закон больших чисел для $\alpha(G(n, p))$.
13. Нахождение асимптотики числа независимости у сильно разреженного гиперграфа. Алгоритм Карпа–Сипсера.
14. Хроматическое число случайного разреженного графа, известные оценки пороговой вероятности свойства r -раскрашиваемости. Оценки пороговой вероятности 2-раскрашиваемости случайного гиперграфа.
15. Случайные подграфы неполных графов. Теорема Фриза–Кривелевича–Мартина о фазовом переходе в случайном подграфе квазислучайного графа.

Список литературы

- [1] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [2] S. Jansen, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [3] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.
- [4] A. Frieze, M. Krivelevich, R. Martin, “The emergence of a giant component in random subgraphs of pseudo-random graphs”, *Random Structures and Algorithms*, **24**:1 (2004), 42–50.
- [5] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, М., 2000.