Функция перманента: алгебраические решения комбинаторных задач

А.Э. Гутерман

Две важные функции в теории матриц и комбинаторике — это определитель и перманент. Выглядят эти функции очень похоже:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad \text{и} \quad \operatorname{per} A = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

где $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ — $n \times n$ матрица над некоторым полем $\mathbb{F}$, а через S_n обозначена группа перестановок множества $\{1, \dots, n\}$.

Общеизвестно, что определитель вычисляется за полиномиальное время. В то же время вопрос существования полиномиального алгоритма вычисления перманента до сих пор остается открытым.

Есть два стандартных подхода к работе с вычислительно сложными инвариантами. Первый заключается в подборе подходящего преобразования, осуществляющего редукцию рассматриваемого инварианта к другому, вычислить который проще. Второй подход состоит в замене явного вычисления рассматриваемого инварианта получением его оценок на подмножествах со специальными свойствами.

Исследование первого подхода для перманента и определителя восходит к работам Полиа 1913г., который изучал вопросы существования отображений $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ определенной структуры, удовлетворяющих свойству $\operatorname{per} A = \det T(A)$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$, называемых конвертерами. Второй подход получил наибольшее развитие для $(0,1)$ и $(-1,1)$ матриц, востребованных в приложениях, перманент которых активно исследуется, начиная с работ Адамара.

Будет изложено введение в теорию перманента и рассказано о недавних результатах докладчика и актуальных открытых проблемах. Среди прочего будет предложено отрицательное решение проблемы Полиа для матриц над конечными полями: доказано отсутствие биективных конвертеров перманента в определитель. Также будет представлен ответ на вопрос Уонга (1974г.), состоящий в доказательстве гипотезы Кройтера (1985г.) о точной верхней границе значений перманента $(-1,1)$ матриц в зависимости от их ранга.

Доклад основан на серии совместных работ с М.В. Будревичем, Г. Долинаром, Б. Кузмой и М. Орлом.