Задачи по курсу “Теория вероятностей”

лектор – доц. Родионов И.В.

весна 2019 г.

1. Распределения вероятностей.

1 Пусть $F(x)$ — функция распределения, соответствующая распределению вероятностей P. Доказать равенства:

a) $\mathsf{P}((a,b]) = F(b) - F(a)$,
b) $\mathsf{P}([a,b]) = F(b) - F(a-)$,
c) $\mathsf{P}((a,b)) = F(b-) - F(a)$,
d) $\mathsf{P}([a,b)) = F(b-) - F(a-)$,
e) $\mathsf{P}(\{x\}) = F(x) - F(x-)$.

2 Показать, что каждая из функций $G_1(x,y) = I(x+y \geq 0)$, $G_2(x,y) = [x+y]$, где $[\cdot]$ — целая часть числа, является непрерывной справа, возрастающей по каждой переменной, но не является функцией распределения в $\mathbb{R}^2$.

3 Плотность абсолютно непрерывного распределения P, заданного на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, равна $p(x)$. Найти функцию распределения, если

a) $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} I(x \geq 0)$ (экспоненциальное, или показательное, распределение с параметром $\lambda > 0$),

b) $p(x) = \frac{\theta}{\pi(\theta^2 + (x-x_0)^2)}$ (распределение Коши с параметром θ и смещением x_0),

c) $p(x) = \frac{1}{b-a} I(a \leq x \leq b)$ (равномерное распределение на $[a,b]$),

d) $p(x) = k(x-1)^{k-1} I(1 \leq x \leq 2)$, $k \in \mathbb{N}$,

e) $p(x) = xe^{-x} I(x > 0)$ (гамма-распределение с параметрами (2, 1)).

4 Стрелок в тире стреляет в “четверть круга”, то есть в область $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$. Распределение вероятности попадания P — равномерное в области D. Иными словами, плотность такого распределения равна $p(x,y) = \frac{1}{\pi/4} I((x,y) \in D)$.

a) Найдите маргинальную функцию распределения и плотность распределения вероятностей P_1, равной проекции P по первой координате.

b) найдите вероятность попадания стрелка в квадрат $[0, 3/4] \times [0, 3/4]$,

c) найдите вероятность попадания в отрезок $[1/2, 3/4]$ по оси y.

5 Пусть P — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$, определенная равенством $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2 \times \mathsf{P}_3$, где P_1 и P_2 — равномерные распределения на $[0,1]$, P_3 — экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$. Найдите

a) $\mathsf{P}(\{(x,y,z) : \ x + z \leq 3\})$,
b) $\mathsf{P}(\{(x,y,z) : \ x - y + z \geq 0\})$,
c) $\mathsf{P}(\{(x,y,z) : \ 1/2 \leq xy \leq 3z\})$.

2. Случайные величины.

1 Если $|\xi|$ является $\mathcal{F}$-измеримой, то верно ли, что ξ также $\mathcal{F}$-измерима?

2 Пусть ξ, η — две случайные величины, заданные на $(\Omega, \mathcal{F})$. Пусть, кроме того, $A \in \mathcal{F}$. Докажите, что функция $\zeta(\omega) = \xi(\omega) I(\omega \in A) + \eta(\omega) I(\omega \in \overline{A})$ также является случайной величиной.

3 Случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Найдите плотности распределения случайных величин

a) $\sqrt{\xi}$,

b) ξ^k, $k \in \mathbb{N}$,

c) $\frac{1}{\lambda} \ln \xi$,

d) $\{\xi\}$, где $\{\cdot\}$ — дробная доля,

e) $1 - e^{-\alpha\xi}$.

4 Случайная величина ξ имеет стандартное распределение Коши. Найдите плотности распределения случайных величин $\frac{\xi^2}{1+\xi^2}$, $\frac{1}{1+\xi^2}$, $\frac{2\xi}{1-\xi^2}$, $\frac{1}{\xi}$.

5 Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) равна $\frac{1}{\pi/4} I(x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0)$. Найдите плотность случайной величины $\xi + \eta$.

6 Пусть ξ — случайная величина с непрерывной функцией распределения F. Каково распределение случайной величины $F(\xi)$?

7 Являются ли следующие множества борелевскими:
a) $B_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
b) $B_2 = \{(x, y) : x + y < 2\}$;
c) множество Кантора на отрезке $[0, 1]$?

3. Независимость. Формула свертки.

1 Величины ξ_1 и ξ_2 независимы, $P(\xi_1 = 0) = P(\xi_1 = 1) = 1/2$, ξ_2 равномерно распределена на отрезке $[0,\,1]$. Найти закон распределения величины $\xi_1 + \xi_2$.

2 Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Упорядочим значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ по неубыванию. Возникает новая последовательность случайных величин $\xi_{(1)} \leq \ldots \leq \xi_{(n)}$, называемая вариационным рядом. Найдите

a) функцию распределения случайной величины $\xi_{(k)}$ для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$,

b) плотность случайной величины $\xi_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, если $F(x)$ имеет плотность $f(x)$.

3 Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$. Найдите плотности распределения случайных величин $\xi + \eta$, $\xi - \eta$, $\xi\eta$, ξ/η.

4 Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы. С помощью формулы свертки найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$, если

a) $\xi_i \sim Exp(\alpha)$, $i = 1, 2$,

b) $\xi_i \sim Pois(\lambda_i)$, $i = 1, 2$,

c) $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$,

d) $\xi_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, 2$ (предполагается, что $p_{\xi_i}(x) = \frac{x^{\alpha_i - 1}\lambda^{\alpha_i} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha_i)} I(x > 0)$).

5 Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найдите распределение случайной величины $\eta = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$.

6 Пусть X, Y — независимые случайные величины. Найдите вероятность того, что из отрезков с длинами X, Y и 1 можно составить треугольник, если $X \sim R[0, 1]$, а $Y \sim Exp(1)$.

4. Математическое ожидание, дисперсия и ковариация.

1 Дана случайная величина ξ. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ, если она имеет

a) биномиальное распределение с параметрами (n, p),

b) пуассоновское распределение с параметром λ,

c) геометрическое распределение с параметром p (т.е. $\mathsf{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \ldots$),

d) нормальное распределение с параметрами (a, σ^2),

e) равномерное распределение на отрезке (a, b),

f) гамма распределение с параметрами (α, λ),

g) бета распределение с параметрами (α, β).

2 Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Вычислите $\mathsf{E}\xi^k$ и $\mathsf{E}|\xi|^k$ для $k \in \mathbb{N}$. Вычислить те же характеристики, если $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

3 Приведите пример двух таких зависимых случайных величин ξ, η, ковариация которых равна 0, что

а) ξ, η не являются нормальными,

б) ξ, η являются нормальными.

4 Случайная величина ξ имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -2; \\ 1/5, & \text{если } -2 \le x < 1; \\ x^2/4, & \text{если } 1 \le x < 2; \\ 1, & \text{если } x \ge 2; \end{cases}$$

Вычислите математическое ожидание и дисперсию ξ.

5 Стрелок в тире стреляет в "четверть круга", то есть в область $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$. Случайный вектор $(\xi,\ \eta)$ является точкой попадания стрелка и имеет равномерное распределение в D. Найдите распределение координат точки попадания, а также $cov(\xi, \eta)$.

6 Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность

$$p_{(\xi,\eta)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - r^2}}\, e^{-(x^2 - 2xyr + y^2)/(2(1-r^2))},$$

где $|r| < 1$. Вычислите матрицу ковариаций случайного вектора (ξ, η). Каково распределение случайной величины ξ?

5. Разные задачи.

1 Случайная точка (ξ_1, ξ_2) равномерно распределена в единичном квадрате $K = \{(u, v) : u, v \in [0; 1]\}$. Обозначим через η число комплексных корней многочлена

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \xi_1^2 x + \xi_2.$$

Найти вероятности $P(\eta = k)$ для $k = 0, 1, 2, 3$.

2 Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} \sin 2\pi(\xi_{k+1} - \xi_k).$$

3 Рассмотрим случайную величину ξ такую, что $F_\xi(x)$ непрерывна, $E\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$. Обозначим через $x_{1/2}$ медиану функции распределения F, т.е. такую точку, что $F_\xi(x_{1/2}) = 1/2$. Доказать, что справедливо неравенство

$$|a - x_{1/2}| \leq \sqrt{2}\sigma.$$

4 Пусть ξ – случайная величина с абсолютно непрерывной функцией распределения F. Найти такую величину μ, что

$$\mu = \arg\min_{a \in \mathbb{R}} E|\xi - a|.$$

5 Пусть случайная величина ξ имеет плотность, причем она симметрична и монотонна убывает при $x > 0$. Доказать, что $\forall \varepsilon \geq 0$

$$P(|\xi| > \varepsilon) \leq \frac{4}{9}\frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

6 Построить пример такой случайной величины ξ с абсолютно непрерывным распределением и такой непрерывной функции $g(x)$, что распределение случайной величины $g(\xi)$ не вырождено (т.е. $g(\xi) \neq const$ п.н.) и дискретно.

6. Условные математические ожидания и условные распределения

1 Из урны, содержащей 2 черных, 4 красных и 2 белых шара вытаскиваются с возвращением шары по одному n раз. Пусть X — количество черных, а Y — количество красных шаров, появившихся в этих опытах. Найдите $\mathsf{E}(X|X+Y)$.

2 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения с конечным математическим ожиданием, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — симметричная (значение не меняет при любой перестановке аргументов) борелевская функция. Докажите, что $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ справедливо равенство

$$\mathsf{E}(X_i|g(X_1, ..., X_n)) = \mathsf{E}(X_j|g(X_1, ..., X_n)).$$

Найдите $\mathsf{E}(X_1| \sum_{i=1}^n X_i)$.

3 Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Вычислите $\mathsf{E}(X|X^2)$.

4 Пусть $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ – н.о.р. случайные величины, τ – случайная величина, не зависящая от $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ и принимающая натуральные значения. Обозначим $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Доказать, что $ES_\tau = E\tau E\xi_1$ и $E(S_\tau - \tau E\xi_1)^2 = E\tau D\xi_1$.

5 Пусть $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ – н.о.р. случайные величины, $P(\xi_1 = -1) = P(\xi_1 = -1) = 1/2$. Пусть случайные величины τ_1 и τ_2 независимы, $\tau_i \sim Pois(\lambda_i)$, а также (τ_1, τ_2) и S_n независимы $\forall n$. Найти ES_{τ_1} и $cov(S_{\tau_1}, S_{\tau_2})$.

6 Пусть X, Y, Z – независимые одинаково распределенные случайные величины. Найдите $\mathsf{E}(4X - 3Y + Z|X + Y + Z)$.

7. Условные математические ожидания и условные распределения II.

1 Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$. Найдите а) $\mathsf{E}(X_1 | X_{(1)})$, б) $\mathsf{E}(X_1 | X_{(n)})$.

2 Пусть X и Y — независимые случайные величины, X имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а Y — экспоненциальное с параметром 1. Найдите $\mathsf{E}(Y^3/X^2 | X/Y)$.

3 Пусть случайные величины X и Y независимы, плотность случайной величины X равна $3x^2 I_{[0,1]}(x)$, плотность случайной величины Y равна $4x^3 I_{[0,1]}(x)$. Вычислите $\mathsf{E}(XY | X - Y)$.

4 (Формула полной вероятности в непрерывном случае) Пусть у случайной величины η есть плотность $p_\eta(x)$, тогда для произвольной случайной величины ξ и борелевского множества B верно

$$P(\xi \in B) = \int\limits_{\mathbb{R}} P\left(\xi \in B \,|\eta = y\,\right) p_\eta(y) dy.$$

5 Назовем случайной функцией X на $T \subset \mathbb{R}$ набор случайных величин $\{X_t, t \in T\}$ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть N – такая случайная функция на $\mathbb{R}_+$, что $N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s))$ для $t > s$, где параметр $\lambda > 0$. Пусть X и Y – независимые случайные величины, распределенные по закону $Exp(2)$ и не зависимые со случайной функцией N. Найти $P(N_X - N_Y = 0)$.

6 Пусть W – такая случайная функция, что $W_t \sim N(0, t)$. Найти EW_X^2, где $X \sim Exp(3)$ и X не зависит от W.

8. Виды сходимостей случайных величин.

1 Докажите, что в вероятностных пространствах с не более чем счетным числом элементарных исходов сходимость с вероятностью 1 эквивалентна сходимости по вероятности.

2 Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимы и имеют распределение Бернулли, причем $\xi_n \sim Bern(p_n)$. Найдите необходимое и достаточное условие на числа $p_1, p_2, \ldots$ того, что (a) $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$; (b) $\xi_n \xrightarrow{L_p} 0$, $p \geq 1$; (c) $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.

3 Пусть последовательность случайных величин $(\xi_n)_{n\geq 1}$ такова, что для некоторого $p > 0$ выполнено $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}|\xi_n|^p < \infty$. Показать, что $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.

4 Пусть последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ сходится по распределению к константе C. Докажите, что тогда $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} C$.

5 Пусть $(\xi_n)_{n\geq 1}$ — последовательность случайных величин. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Покажите, что если $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. Докажите, что сходимость почти наверное нельзя заменить на сходимость по вероятности.

6 Верно ли, что из сходимости в L_p следует сходимость в L_q, если $p > q$?

9. Случайное блуждание. Лемма Бореля-Кантелли.

На семинаре необходимо разобрать задачи: $P(S_n = x)$, принцип отражения, лемма о баллотировке.

1 Найти вероятность того, что симметричное случайное блуждание никогда не возвратится в 0. Иными словами, найти $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0)$.

2 Пусть $(S_n; n \in \mathbb{N})$ — симметричное случайное блуждание на прямой. Используя принцип отражения, докажите, что

$$P\left(\max_{k\le n} S_k \ge N; S_n < N\right) = P(S_n > N).$$

3 Пусть $(S_n; n \in \mathbb{N})$ — симметричное случайное блуждание на прямой. Используя результат задачи 2, найдите распределение случайной величины $M_n = \max\limits_{k\le n} S_k$ и асимптотику EM_n при $n \to \infty$.

4 Пусть $(S_n; n \in \mathbb{N})$ — случайное блуждание с вероятностью шага вправо p и шага влево q, $p + q = 1$. Докажите, что для $m \le N$ выполнено

$$P\left(\max_{k\le n} S_k \ge N; S_n = m\right) = C_n^u p^v q^{n-v},$$

где $v = \frac{n+m}{2}, u = v - N$.

5 Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Показать, что

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\xi_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1\right) = 1.$$

6 Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\xi_i \sim Pois(\lambda), \lambda > 0$. Показать, что, независимо от λ,

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\xi_n \ln\ln n}{\ln n} = 1\right) = 1.$$

10. Характеристические функции.

1 Найдите характеристическую функцию случайной величины ξ, если
(a) $\xi \sim Bin(n,p)$; (b) $\xi \sim Pois(\lambda)$; (c) $\xi \sim Geom(p)$; (d) $\xi \sim N(a,\sigma^2)$;
(e) $\xi \sim R(a,b)$; (f) $\xi \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$; (g) $\xi \sim Cauchy(\theta)$; (h) ξ имеет распределение Лапласа с параметром $\theta > 0$ (т.е. $p_\xi(x) = \frac{1}{2\theta}\, e^{-|x|/\theta}$).

2 Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Покажите, что выполняются неравенства

(a) $1 - \operatorname{Re}\varphi(2t) \le 4\left(1 - \operatorname{Re}\varphi(t)\right)$,

(b) $\left(\operatorname{Im}\varphi(t)\right)^2 \le \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{Re}\varphi(2t)\right)$,

(c) $\left(\operatorname{Re}\varphi(t)\right)^2 \le \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{Re}\varphi(2t)\right)$,

(d) $\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h}\varphi(u)du\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \operatorname{Re}\varphi(h)\right)^{\frac{1}{2}}$.

3 Выясните, являются ли следующие функции характеристическими:
(a) $\sin t$, (b) $\cos t$, (c) $\cos^2 t$, (d) $\cos t^2$, (e) $e^{-|t|}I\{t<0\} + (1+t^2)^{-1}\, I\{t \ge 0\}$,
(f) $\frac{1}{1+t^2}$, (g) $\frac{1}{1+t^4}$, (h) $e^{-|t|^3}$.

4 Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины. С помощью характеристических функций найдите распределение $\xi_1 + \xi_2$, если (a) $\xi_i \sim N(a_i, \sigma_i^2)$, (b) $\xi_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$, (c) $\xi_i \sim Cauchy(\theta_i)$, (d) $\xi_i \sim Exp(\alpha)$.

11. Предельные теоремы.

1 Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x\right).$$

2 Пусть $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ – н.о.р. случайные величины с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если при некоторых $C>0$, $0<\alpha\le 2$

$$f(t) = 1 - C|t|^\alpha(1+o(1)), t\to 0,$$

то при $n\to\infty$ существует предельное распределение случайных величин

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots \xi_n}{n^{1/\alpha}}.$$

Найти характеристическую функцию этого распределения.

3 Пусть $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ – н.о.р. неотрицательные случайные величины, $E\xi_1 = \mu > 0$. Введем $N_t = \max\{n\ge 0 : \xi_1 + \ldots + \xi_n \le t\}$, $t>0$ (если $\xi_1 > t$, то $N_t = 0$). Доказать, что

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{P} \frac{1}{\mu} \text{ при } t\to\infty.$$

4 Пусть $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ – последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин. Обозначим $M_n = \max\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$. Доказать, что существуют такие последовательности $a_n>0$ и b_n, что

$$P(M_n \le a_n x + b_n) \to e^{-e^{-x}} \text{ при } n\to\infty,$$

и найти их явный вид.

5 Пусть для каждого n случайные величины $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ независимы и одинаково распределены по следующему закону

$$P(\xi_1^{(n)} = -\sqrt{n}) = P(\xi_1^{(n)} = \sqrt{n}) = \frac{1}{2n},\ P(\xi_1^{(n)} = 0) = \frac{n-1}{n}.$$

Найти предельное поведение случайной величины

$$\eta = \frac{\xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}}{\sqrt{nD\xi_1^{(n)}}} \text{ при } n\to\infty.$$

12. Гауссовские векторы.

1 Пусть $X = (\xi, \eta)$ — гауссовский вектор. Подберите такие числа x_1, x_2, что случайные величины $\eta + x_1\xi, \eta + x_2\xi$ являются независимыми.

2 Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma_i^2),\ i = 1, \dots, n$. Найти распределение случайного вектора

$$\eta = (\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \dots, \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n).$$

3 Случайные величины X и Y — независимые нормальные с параметрами $(0,1)$. Докажите, что распределение случайной величины $Z = (X+a)^2 + (Y+b)^2$ зависит только лишь от величины $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

4 Найдите $\mathsf{E}(X - Y - Z | X + 2Y + Z)$, если случайный вектор (X, Y, Z) имеет нормальное распределение со средним $(-1, 0, 2)$ и матрицей ковариаций

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5 Пусть $\xi_n \sim N(a_n, \Sigma_n),\ n \geq 1$ – последовательность гауссовских векторов, причем $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ при $n \to \infty$. Доказать, что ξ – гауссовский вектор.

6 Найдите $\mathsf{E}(\exp\{2X + Y\} | X - Y)$, если случайный вектор (X, Y) имеет нормальное распределение со средним $(-1, 2)$ и матрицей ковариаций

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$