

# Программа курса "Теория Вероятностей"

лектор - доц. И. В. Родионов

весенний семестр 2019 года

1. Вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Аксиоматика Колмогорова. Свойства вероятности. Теорема о непрерывности в "нуле" вероятностной меры и следствия из нее (б/д).
2. Вероятностные меры на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Функция распределения вероятностной меры, ее свойства. Примеры. Теорема Каратеодори (б/д). Теорема о построении вероятностной меры на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  по функции распределения.
3. Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой. Дискретные, абсолютно непрерывные и сингулярные распределения. Примеры. Теорема Лебега о функции распределения (б/д).
4. Вероятностные меры на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . Многомерная функция распределения, ее свойства. Теорема о построении вероятностной меры на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  по функции распределения (б/д). Многомерная плотность. Примеры.
5. Измеримые отображения. Случайные величины и действия над ними. Критерий измеримости (б/д).
6. Характеристики случайных величин и векторов: распределение вероятностей, функция распределения. Независимость случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся наборов независимых случайных величин. Теорема о приближении случайной величины простыми (б/д).
7. Математическое ожидание случайной величины (интеграл Лебега по вероятностной мере). Основные свойства математического ожидания (9 свойств).
8. Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин. Теорема о замене переменных под интегралом Лебега (б/д). Подсчет математического ожидания для случайной величины с кусочно-непрерывной функцией распределения.
9. Прямое произведение вероятностных пространств. Теорема Фубини (б/д). Лемма о свертке.
10. Дисперсия, ковариация и их свойства. Неравенство Коши – Буняковского. Дисперсия суммы независимых случайных величин. Математическое ожидание и матрица ковариаций случайного вектора.
11. Условное математическое ожидание случайной величины относительно  $\sigma$ -алгебры. Теорема Радона-Никодима (б/д) и обоснование существования условного математического ожидания. Явный вид условного математического ожидания в случае, если  $\sigma$ -алгебра порождена счетным разбиением.
12. Основные свойства условного математического ожидания. Теорема о наилучшем квадратичном прогнозе.

13. Условные распределения и условные плотности. Достаточное условие существования условной плотности. Вычисление условного математического ожидания с помощью условной плотности.
14. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Йенсена.
15. Виды сходимости случайных величин, их взаимосвязи. Контрпримеры. Связь между сходимостью по распределению и сходимостью в основном (б/д). Критерий сходимости почти наверное.
16. Лемма Бореля-Кантелли. Критерий Коши сходимости почти наверное. Критерий Коши сходимости по вероятности.
17. Неравенство Колмогорова. Теорема Колмогорова-Хинчина о сходимости ряда из случайных величин.
18. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями.
19. Теорема о монотонной сходимости (б/д). Лемма Фату. Теорема Лебега о мажорированной сходимости.
20. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.
21. Случайные блуждания. Верхние и нижние функции. Закон повторного логарифма для случайного блуждания (б/д).
22. Характеристические функции вероятностных мер, случайных величин и векторов. Примеры. Основные свойства характеристических функций случайных величин.
23. Теорема о производных характеристической функции. Теорема о разложении в ряд характеристической функции. Характеристическая функция стандартного нормального закона.
24. Формула обращения (б/д). Характеристическая функция стандартного распределения Коши. Независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций. Теорема Бохнера-Хинчина (доказательство только в одну сторону). Теорема Пойа (б/д). Теорема Марцинкевича (б/д).
25. Теорема единственности для характеристических функций вероятностных мер на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Теорема непрерывности для характеристических функций (2-й пункт - б/д).
26. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин. Неравенство Берри-Эссеена (б/д).
27. ЦПТ в форме Линдеберга (б/д). Выполнимость условия Линдеберга. Условие бесконечной малости и его связь с условием Линдеберга (б/д).
28. Гауссовские случайные векторы. Теорема о 3 эквивалентных определениях гауссовского вектора. Свойства гауссовских векторов. Явный вид плотности многомерного нормального распределения (б/д).
29. Многомерная центральная предельная теорема (б/д).

## Список литературы

- [1] Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. Москва, 1982.  
<http://www.twirpx.com/file/117603/>
- [2] Чернова Н.И. Теория вероятностей.  
[www.nsu.ru/mmф/tvims/chernova/sibguti/tv-sibguti.pdf](http://www.nsu.ru/mmф/tvims/chernova/sibguti/tv-sibguti.pdf)
- [3] Ширяев А.Н. Вероятность. Москва, 2004.  
<http://erlikh.my1.ru/load/17-1-0-107> и <http://erlikh.my1.ru/load/17-1-0-108>
- [4] Жуковский М.Е., Родионов И.В. Основы теории вероятностей. Москва, МФТИ, 2015.  
<http://istina.msu.ru/media/publications/book/d00/950/9446605/Tex-sample-a5.pdf>
- [5] Жуковский М.Е., Родионов И.В., Шабанов Д.А. Введение в математическую статистику. Москва, МФТИ, 2017.  
<https://istina.msu.ru/publications/book/35312005/>
- [6] Боровков А.А. Теория вероятностей. 1986.
- [7] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.