1. В ряд расположены m предметов. Случайно выбираются k предметов, $k < m$. Случайная величина X равна количеству таких предметов i, что i — выбран, а все его соседи не выбраны. Найдите $\mathsf{E}X$.

2. На скамейке сидят n человек. Каждый из них независимо бросает игральную шестигранную кость. Случайная величина X равна количеству людей, у которых у хотя бы одного соседа выпало то же число, что и у него самого. Найдите $\mathsf{E}X$ и $\mathsf{D}X$.

3. Случайные величины X, Y, Z, W независимы в совокупности и одинаково распределены: каждая равновероятно принимает значения 1 и -1. Является ли независимым в совокупности следующий набор случайных величин: XYZ, XYW, XW?

4. Является ли количество треугольников X в случайном графе $G(n,p)$ случайной величиной, независимой с количество ребер Y в нем? Найдите $\mathsf{E}XY$.

5. Случайный вектор (X,Y) принимает значения из $\{0,1\}^2$, причем

$$\mathsf{P}(X=0,Y=0)=a,\ \mathsf{P}(X=0,Y=1)=b,\ \mathsf{P}(X=1,Y=0)=c,\ \mathsf{P}(X=1,Y=1)=d.$$

Найдите необходимые и достаточные условия для того, чтобы X и Y были а) некоррелированными, б) независимыми.

6. Случайная величина X имеет распределение $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^X$.

7. Известно, что ξ — пуассоновская случайная величина с параметром 2015. Случайная величина η равна $\xi^2 4^\xi$. Найдите математическое ожидание случайной величины η.

8. Случайная величина ξ имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -3; \\ (3+x)/40, & \text{если } -3 \le x < 1; \\ x^3/10, & \text{если } 1 \le x < 2; \\ 1, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

Вычислите математическое ожидание и дисперсию ξ.

9. Случайная величина ξ имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x < -1; \\ (5+x)/10, & \text{если } -1 \le x < 1; \\ 1-e^{-x}, & \text{если } x \ge 1. \end{cases}$$

Вычислите математическое ожидание и дисперсию ξ.

10. Является ли функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -1; \\ (1+x)/2, & \text{если } -1 \le x < 0; \\ (2x+5)/10, & \text{если } 0 \le x < 1.5; \\ \sin x, & \text{если } 1.5 \le x < \pi/2; \\ 1, & \text{если } x \ge \pi/2. \end{cases}$$

функцией распределения для некоторой случайной величины? Если да, то вычислите математическое ожидание и дисперсию такой случайной величины.

11. Случайная величина ξ имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -3; \\ (3+x)/40, & \text{если } -3 \leq x < 1; \\ x^3/10, & \text{если } 1 \leq x < 2; \\ 1, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

Случайна величина η распределена по Пуассону с параметром 1 и является независимой с ξ. Пусть $X = \xi(\eta + 1)$. Найти $\mathsf{E}X$, $\mathsf{D}X$.

12. Случайные величины X, Y, Z, W независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдите вероятность того, что отрезки с длинами X, Y, Z и W могут служить сторонами некоторого четырехугольника.

13. Случайные величины X и Z независимы. X имеет экспоненциальное распределение с параметром 3, а Z — равномерное на отрезке $[0, 2]$. Найдите плотность случайной величины $Y = Z - X$.

14. Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ — независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найдите совместную плотность случайных величин $X_{(2)}$ и $X_{(n)}$.

15. Случайные величины X и Y независимы и имеют показательное распределение с параметром 1. Найдите плотность случайной величины $3X - 2Y$.

16. Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ — независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найдите ковариацию случайных величин $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$.

17. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдите плотность случайной величины $3X - 2Y$.

18. Случайные величины ξ_1, ξ_2 — независимы, ξ_i имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_i, $i = 1, 2$. Положим $\eta = \min(\xi_1, \xi_2^2)$. Найдите $\mathsf{E}\eta$.

19. Случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметром 1 и независимы. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 1/(X + Y)$.

20. Случайные величины X, Y, Z независимы. X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ, Y — распределение Коши с параметром σ, Z — равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдите характеристическую функцию XYZ.

21. Пусть $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, — простейшее случайное блуждание на прямой, $N \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $m < N$, $\mathsf{P}(\xi_1 = 1) = p$. Найдите все значения p, при которых выполнено равенство

$$\mathsf{P}(\max_{k \leq n} S_k = N, S_n = m) = \mathsf{P}(S_n = 2N - m) - \mathsf{P}(S_n = 2N - m + 2).$$

22. Пусть S_n, $n \in \mathbb{N}$, — случайное блуждание на прямой, построенное по случайной величине ξ, имеющей следующее распределение: $\mathsf{P}(\xi = 2) = 1/3$, $\mathsf{P}(\xi = -1) = 2/3$. Вычислите $\mathsf{P}(S_{11} = 7 | S_{13} = 8, S_7 = 8)$.

23. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $c(x^{2k} + x)e^{-x}I(x > 0)$. Найдите c и докажите, что $\mathsf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\ln n} = 1) = 1$.

24. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $c(x^{2k} + x)e^{-x^2/2}$. Найдите c и докажите, что $\mathsf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2}) = 1$.

25. В случайном графе $G(n, p)$

а) найдите (приблизительно) вероятность того, что проведено хотя бы 540 ребер при $n = 100$, $p = 0.1$;

б) найдите (приблизительно) вероятность того, что проведено хотя бы 4 ребра при $n = 100$, $p = 0.0007$.

26. Две гауссовские случайные величины дают в сумме гауссовскую случайную величину. Верно ли, что эти две случайные величины являются компонентами гауссовского вектора?

27. Характеристическая функция вектора (ξ, η) равна $\phi_{(\xi,\eta)}(x, y) = e^{-2yi-1/2(2x^2-2xy+y^2)}$. Найдите $\mathsf{E}\xi^2\eta$.

28. Является ли функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1; \\ \exp\left(-(|x|-1)^2\right), & \text{если } |x| \geq 1. \end{cases}$$

характеристической?

29. Пусть случайная величина ξ имеет характеристическую функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} -|x| + 1, & \text{если } |x| < 1/2; \\ -2|x| + 3/2, & \text{если } 1/2 \leq |x| < 3/4; \\ 0, & \text{если } |x| \geq 3/2. \end{cases}$$

Вычислите плотность случайной величины ξ.

30. Является ли функция $\frac{1}{2}(\cos t + e^{-t^2})$ характеристической для некоторого распределения вероятностей?

31. Случайная величина ξ имеет характеристическую функцию $e^{-t^2/2}\left(1 - \frac{t^2}{2}\right)$. Найдите плотность распределения ξ.

32. Гауссовский случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет вектор математических ожиданий $(1, 3)$ и матрицу ковариаций $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Пусть $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Найдите $\mathsf{E}\eta^3$.

33. Найдите условную плотность Y относительно $X + 2Y$, если случайные величины X и Y независимы и экспоненциально распределены, X — с параметром 1, Y — с параметром 2. Используя полученную условную плотность, вычислите $\mathsf{E}\left(XY|X + 2Y\right)$.

34. Случайные величины X, Y — независимые экспоненциальные с параметром 1. Вычислите условную плотность $X + Y$ относительно X/Y.

35. Случайные величины X и Y — независимы, X имеет равномерное распределение на отрезке $[2, 3]$, а Y — на отрезке $[1, 2]$. Вычислите $\mathsf{E}(XY|X + Y)$.