Программа курса "Теория Вероятностей"

лектор — к.ф.-м.н. М.Е. Жуковский

весенний семестр 2019

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Свойства вероятности. Теорема о непрерывности в “нуле” вероятностной меры.

2. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Примеры. Независимость событий и систем событий. Пример Бернштейна.

3. Вероятностные меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Функция распределения вероятностной меры, ее свойства. Примеры. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по функции распределения (б/д). Дискретные и абсолютно непрерывные распределения, плотность. Примеры.

4. Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Многомерная функция распределения, ее свойства. Примеры. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д). Дискретные и абсолютно непрерывные распределения, плотность.

5. Измеримые отображения. Случайные величины и векторы. Действия над случайными величинами. Пределы последовательностей случайных величин. Характеристики случайной величины (вектора): распределение вероятностей, функция распределения, плотность.

6. Независимость случайных величин. Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся наборов независимых случайных величин. Совместное распределение конечного набора случайных величин. Свертка распределений.

7. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Примеры. Математическое ожидание абсолютно непрерывной случайной величины. Примеры.

8. Математическое ожидание случайной величины: определение для произвольных случайных величин. Основные свойства математического ожидания.

9. Напоминание формулировки теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега. Подсчет математического ожидания от функции от случайной величины. Примеры. Напоминание формулировки теоремы Фуббини. Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин.

10. Дисперсия, ковариация и их свойства. Примеры. Неравенство Коши – Буняковского. Дисперсия суммы независимых случайных величин.

11. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Йенсена.

12. Условное математическое ожидание. Теорема Радона–Никодима (б/д). Существование и единственность математического ожидание. Подсчет условного математического ожидания для сигма-алгебры, порожденной разбиением.

13. Свойства условного математического ожидания.

14. Условное распределение и условная плотность. Критерий существования условной плостности. Подсчет условного математического ожидания с помощью условной плотности.

15. Простейшее симметричное случайное блуждание. Траектории простейшего симметричного случайного блуждания. Принцип отражения.

16. Теорема Муавра–Лапласа и теорема Пуассона. Закон повторного логарифма для простейшего симметричного случайного блуждания (б/д). Закон повторного логарифма для произвольных случайных величин (б/д).

17. Виды сходимости случайных величин (почти наверное, по вероятности, в пространстве L^p, по распределению), их взаимосвязи.

18. Лемма Бореля – Кантелли. Теорема Александрова (без доказательства). Критерий Коши сходимости с вероятностью 1. Критерий Коши сходимости по вероятности. Критерий фундаментальности с вероятностью 1.

19. Неравенство Колмогорова.

20. Теорема о сходимости почти наверное ряда из случайных величин. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями.

21. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.

22. Вероятности больших уклонений — скорость сходимости в законе больших чисел.

23. Характеристические функции вероятностных мер, случайных величин и векторов. Примеры. Теорема о единственности (без доказательства). Теорема о независимости. Теорема об обращении (без доказательства).

24. Основные свойства характеристических функций случайных величин (первые 4 с доказательством). Теорема Бохнера–Хинчина (доказательство только в одну сторону).

25. Теорема о непрерывности (без доказательства). Центральная предельная теорема.

26. Гауссовские векторы. Три эквивалентных определения и критерий независимости.

27. Сходимости векторов. Связь между сходимостью векторов и покомпонентной сходимостью. Законы больших чисел. Многомерная центральная предельная теорема (б/д).

Список литературы

[1] А.А. Боровков, *Теория вероятностей*, 3-е издание, Эдиториал УРСС, Москва, 1999.

[2] М.Е. Жуковский, И.В. Родионов, *Основы теории вероятностей*, МФТИ, Москва, 2015.

[3] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 7-е издание, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2009.

[4] Б.А. Севастьянов, *Курс теории вероятностей и математической статистики*, Наука, Москва, 1982.

[5] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Мир, Москва, 1967.

[6] А.Н. Ширяев, *Вероятность*, 4-е издание, МЦНМО, Москва, 2007.