Вопросы к зачету по курсу “Теория гиперграфов”

лектор — профессор Д.А. Шабанов

весенний семестр 2019

1. Теорема Турана для графов. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости произвольного графа. Числа Турана $ex(n, G)$ для произвольного графа G. Верхняя оценка числа Турана $ex(n, K_{s,t})$, следствие из нее — оценки числа ребер дистанционного графа в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

2. Теорема Эрдеша–Стоуна об асимптотическом поведении $ex(n, G)$.

3. Числа Турана $T(n, b, k)$ для гиперграфов, понятие (n, b, k)-системы. Рекуррентные неравенства для чисел $T(n, b, k)$, простая нижняя оценка $T(n, b, k)$. Турановские плотности $t(b, k)$, рекуррентное неравенство для турановских плотностей. Верхняя оценка турановской плотности $t(b, k)$ (первая конструкция А. Сидоренко).

4. Верхняя оценка турановской плотности $t(2k + 1, 2k)$ (вторая конструкция А. Сидоренко). Оценка турановской плотности с помощью случайного гиперграфа (третья конструкция А. Сидоренко).

5. Теорема Турана для гиперграфов и нижняя оценка Спенсера для $T(n, b, k)$. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости k-однородного гиперграфа. Нижняя оценка для $t(b, k)$, ее порядок при фиксированном k и растущем b.

6. Теорема Турана для графов с большим обхватом. Нижняя оценка Айтаи–Комлоша–Семереди (теорема Ширера) для числа независимости графа без треугольников со средней степенью вершины t. Следствие: верхняя оценка числа Рамсея $R(3, t)$. Точность оценки в теореме Айтаи–Комлоша–Семереди (существование графов с небольшим числом независимости и ограниченной средней степенью вершины).

7. Верхняя оценка числа Рамсея $R(s, t)$ при фиксированном s и растущем t.

8. Теорема Ширера о числе независимости графа, не содержащего подграфов, изоморфных K_r.

9. Теорема Алона о нижней оценке числа независимости графа, в котором у каждой вершины подграф его соседей имеет ограниченное хроматическое число.

10. Теорема о нижней оценке числа независимости k-однородного гиперграфа с обхватом больше 4 и со средней степенью вершины d (б/д). Аналогичная теорема Рёдля–Дьюка–Лефманна для простых гиперграфов. Следствие: опровержение гипотезы Хейлбронна в комбинаторной геометрии.

11. Экстремальная задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, простая верхняя оценка. Вероятностная нижняя оценка $m(k,r)$. Следствие: нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Вероятностная верхняя оценка $m(k,r)$. Теорема Алона об асимптотическом поведении $m(k,r)$ при растущем r.

12. Критерий Плухара r-раскрашиваемости гиперграфа в терминах существования упорядоченных r-цепей. Нижняя оценка Радхакришнана–Сринивасана для $m(k,2)$ (доказательство Черкашина–Козика).

13. Локальная лемма Ловаса, формулировка общего случая. Различные варианты подбора параметров: симметричный, несимметричный и полиномиальный варианты. Применение последнего варианта: нижняя оценка внедиагонального числа Рамсея $R(3,t)$.

14. Теорема Эрдеша–Ловаса об оценке максимальной степени ребра (вершины) в однородном гиперграфе с большим хроматическим числом. Следствие: наилучшая нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Задача Эрдеша–Ловаса о раскрасках простых гиперграфов. Лемма о свойствах простых гиперграфов с большим хроматическим числом. Следствие: нижняя оценка $m^*(k,r)$. Теорема Косточки–Мубаи–Рёдля–Тетали о нижней оценке $m^*(k,r)$ при больших r.

15. Теорема Сауэра о существовании однородных регулярных гиперграфов с большим обхватом.

16. Теорема Косточки–Рёдля о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, большим обхватом и ограниченными степенями вершин.

17. Упаковки гиперграфов, теорема Лу–Секеи об отрицательных корреляциях в пространстве случайных биекций. Теорема о достаточном условии упаковки гиперграфов. Следствия: достаточное условие совершенной G-упаковки; нижняя оценка для минимальной степени вершины, гарантирующей существование совершенного k-сочетания.

18. Числа Ван дер Вардена $W(k,r)$, нижняя оценка в общем случае. Оценки $W(3,r)$: нижняя оценка Мозера, верхняя оценка Грэма–Шолимоши.