

# Вопросы к экзамену по курсу “Случайные графы”

лектор — Д.А. Шабанов

весенний семестр 2019

1. Пороговые вероятности и пороговые функции обладания монотонными свойствами случайным подмножеством. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства  $Q$ . Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.
2. Малые подграфы в случайном графе  $G(n, p)$ . Функция  $m(G)$ , сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа  $G(n, p)$ , изоморфных данному фиксированному графу  $G$ . Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа  $G(n, p)$ , изоморфного данному фиксированному графу  $G$ .
3. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами. Многомерный метод моментов. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа  $G(n, p)$ , изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу  $G$ . Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы (б/д).
4. Метод моментов. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа  $G(n, p)$ , изоморфных данному фиксированному графу  $G$ .
5. Неравенство Чернова. Эволюция случайного графа  $G(n, p)$ . Случай  $np = c \in (0, 1)$ : теорема о максимальном размере компоненты связности. Сложные и унициклические компоненты в таком графе — предельные теоремы для числа таких компонент. Общее число вершин в унициклических компонентах.
6. Эволюция случайного графа  $G(n, p)$ . Случай  $np = c > 1$ . Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса (б/д). Теорема о размере максимальной связной компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты (б/д).
7. Эволюция случайного графа  $G(n, p)$ . Случай  $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$ . Лемма о среднем значении числа  $l$ -компонент на  $k$  вершинах. Лемма о среднем количестве общего числа вершин в древесных и унициклических компонентах. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа.

8. Свойства первого порядка в случайных графах. Законы нуля или единицы при  $\min\{p, 1-p\}n^\alpha \rightarrow \infty$ . Критерий справедливости закона нуля или единицы.
9. Законы нуля или единицы в случайном графе при  $p = n^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . Формулировка теоремы Спенсера-Шелаха. Редкие, плотные, жесткие, надежные расширения.  $t$ -замыкание. Теорема о конечном замыкании.
10. Теорема о числе надежных расширений (б/д). Теорема о существовании универсального расширения. Выигрышная стратегия Консерватора в игре Эренфойхта, используемая для доказательства теоремы Спенсера-Шелаха.
11. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени  $k$  в случайном графе  $G(n, p)$ . Аналогичные теоремы для числа вершин степени не менее (не более)  $k$ . Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе  $G(n, p)$ .
12. Связность случайного графа  $G(n, p)$ . Теорема о предельной вероятности связности  $G(n, p)$  при условии  $p = (\ln n + c + o(1))/n$ . Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности  $G(n, p)$ . Следствия из этой теоремы: точная пороговая вероятность для свойства отсутствия изолированных вершин, пороговая функция для связности случайного графа  $G(n, m)$ . Лемма о одновременном наступлении связности и отсутствия изолированных вершин в графовом случайном процессе  $(\tilde{G}(m), m = 0, \dots, \binom{n}{2})$ .
13. Совершенные паросочетания в случайном графе. Точная пороговая вероятность появления в случайном графе  $G(n, p)$  совершенного паросочетания.
14. Пути и маршруты в графах. Теорема о длине максимального пути в случайном графе  $G(n, p)$ . Понятие случайного двухцветного мультиграфа  $G(n, r, r)$ , алгоритм поиска пути в цветном мультиграфе, его формальное описание.
15. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поша. Три леммы о наличии свойства  $|U \cup \Gamma(U)| \geq 3|U|$  для малых подмножеств  $U$  в случайном графе  $G(n, p)$ . Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа  $G(n, p)$  при условии  $p = (\ln n + \ln \ln n + \omega(n))/n$ , где  $\omega(n) \rightarrow +\infty$ .
16. Неравенства концентрации в теории вероятностей. ФКГ-неравенство в простейшем случае. Неравенство Янсона, следствия из него. Неравенство Азумы-Хеффдинга для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями. Мартингалы реберного и вершинного типов в случайных графах.
17. Независимые множества в случайном графе. Число независимости  $\alpha(G(n, p))$  и его асимптотическое поведение при  $p = \text{const}$ . Поведение числа независимости в динамической модели случайного графа  $G(\mathbb{N}, p)$ .
18. Раскрываемость случайного графа. Оценка вероятности отсутствия множества независимости большого размера в случайного графа  $G(n, p)$  с помощью неравенства Янсона. Теорема об асимптотическом поведении хроматического числа  $\chi(G(n, p))$  для случая  $p = \text{const}$ . Теорема Лучака об оценках хроматического числа случайного графа  $G(n, p)$  в общем случае (б/д).

19. Раскрашиваемость разреженного случайного графа. Теорема о концентрации в двух значениях хроматического числа случайного графа  $G(n, p)$  при  $p \leq n^{-6/7}$ .
20. Независимые множества  $G(n, p)$  в случае  $p = c/n$ . Метод интерполяции и закон больших чисел для  $\alpha(G(n, p))$ .
21. Независимые множества  $G(n, p)$  в случае  $p = c/n$ . Алгоритм Карпа–Сипсера для поиска независимого множества в графе, его применение к деревьям. Аппроксимация случайного графа случайным деревом и нахождение предельной константы для  $\alpha(G(n, p))/n$  при фиксированном  $c \leq 1$ .
22. Раскрашиваемость разреженного случайного графа. Теорема Ахлиоптаса – Наора о явном виде значений концентрации в случае  $p = c/n$ ,  $c > 1$  (б/д). Оценки пороговой вероятности  $r$ -раскрашиваемости случайного графа вида  $2r \ln r - \ln r \pm O(1)$ . Доказательство нижней оценки с помощью метода второго момента (по модулю технической леммы).