Задачи по курсу случайных графов. Часть 5

1. Пусть $G(n,n,p)$ — случайный двудольный граф. Докажите, что

$$\mathsf{P}(G(n,n,p) \text{ связен}) \to \begin{cases} 0, & \text{если } np - \ln n \to -\infty; \\ 1, & \text{если } np - \ln n \to +\infty. \end{cases}$$

2. (1) Пусть $np = \Theta(\ln n)$. Докажите, что в этом случае случайный граф $G(n,p)$ с вероятностью, стремящейся к 1, состоит из гигантской компоненты и компонент размера $O(\ln n)$.

   (2) Пусть $np = \ln n - \ln\ln\ln n$. Докажите, что в этом случае случайный граф $G(n,p)$ с вероятностью, стремящейся к 1, состоит из гигантской компоненты и изолированных вершин, причем число последних имеет порядок $O(\ln n)$.

3. Пусть $np = \Theta(\ln n)$, а $u = \frac{n(\ln\ln n)^2}{\ln n}$. Докажите, что тогда с вероятностью, стремящейся к 1, для $G(n,p)$ будут выполнены два свойства

   (i) между любыми двумя непересекающимися подмножествами вершин размера не меньше u есть ребро;

   (ii) каждое подмножество вершин S размера не более $2u$ содержит внутри себя не более $(\ln\ln n)^3|S|$ ребер.

4. Пусть $y_n = 2np - \ln n - 2\ln\ln n$, а X_n – число “вишен” в $G(n,p)$. Докажите, что

   - если $y_n \to -\infty$ и $n^3p^2 \to +\infty$, то X_n сходится по вероятности к $+\infty$;
   - если $y_n \to +\infty$, то X_n сходится по вероятности к нулю.

5. Пусть $y_n = 2np - \ln n - 2\ln\ln n$, а X_n – число “вишен” в $G(n,p)$. Докажите, что если $y_n \to c$, то X_n сходится по распределению к пуассоновскому с параметром $\frac{1}{8}e^{-c}$, а вероятность того, что будет ровно одна “вишня” и число изолированных вершин нечетно сходится к $\frac{1}{16}e^{-c}\exp\left\{-\frac{1}{8}e^{-c}\right\}$.

6. Докажите, что в графовом случайном процессе с вероятностью, стремящейся к 1, моменты исчезновения последней изолированной вершины и появления совершенного паросочетания совпадают.

7. Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф с долями V_1 и V_2, имеющими одинаковую мощность n. Докажите, что если G не обладает совершенным паросочетанием, то найдется такое $i = 1,2$ и $S \subset V_i$, что

   (i) $|S| = |N(S)| + 1$, где $N(S)$ — множество соседей S;

(ii) $|S| \leqslant \lceil n/2 \rceil$;

(iii) каждая вершина $N(S)$ имеет не менее двух соседей в S.

8. Используя первую и седьмую задачи,

   а) докажите, что пороговая вероятность появления в $G(n,n,p)$ совершенного паросочетания совпадает с пороговой вероятностью исчезновения изолированных вершин;

   б) вычислите пороговую вероятность появления в $G(n,n,p)$ совершенного паросочетания.

СРОК СДАЧИ вторник, 26 марта.