Программа курса
«Случайные графы II»

лектор — Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики ФИВТ,
магистратура 10 семестр

1. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени k в случайном графе $G(n,p)$. Аналогичные теоремы для числа вершин степени не менее (не более) k. Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе $G(n,p)$.

2. Связность случайного графа $G(n,p)$. Теорема о предельной вероятности связности $G(n,p)$ при условии $p = (\ln + c + o(1))/n$. Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности $G(n,p)$. Следствия из этой теоремы: точная пороговая вероятность для свойства отсутствия изолированных вершин, пороговая функция для связности случайного графа $G(n,m)$.

3. Графовый случайный процесс $(\tilde{G}(m), m = 0, \ldots, \binom{n}{2})$, случайные моменты первого появления монотонно возрастающих свойств. Вершинная и реберная k-связность графов, сепараторы в графах. Лемма о сепараторах в $G(n,p)$. Теорема об одновременном наступлении k-связности и отсутствии вершин степени меньше k в графовом случайном процессе $\tilde{G}$.

4. Совершенные паросочетания в случайном графе. Точная пороговая вероятность появления в случайном графе $G(n,p)$ совершенного паросочетания.

5. Пути и маршруты в графах. Теорема Комлоша–Семереди о длине максимального пути в случайном графе $G(n,p)$. Понятие случайного двухцветного мультиграфа $G(n,r,r)$, алгоритм поиска пути в цветном мультиграфе, его формальное описание.

6. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поша. Три леммы о наличии свойства $|U \cup \Gamma(U)| \geq 3|U|$ для малых подмножеств U в случайном графе $G(n,p)$.

7. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа $G(n,p)$ при условии $p = (\ln n + \ln\ln n + \omega(n))/n$, где $\omega(n) \to +\infty$. Теорема о об одновременном наступлении гамильтоновости и отсутствии вершин степени меньше 2 в графовом случайном процессе $\tilde{G}$ (б/д).

8. Неравенства концентрации в теории вероятностей. FKG–неравенство в простейшем случае. Неравенство Янсона, следствия из него. Неравенство Азумы–Хеффдинга для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями. Мартингалы реберного и вершинного типов в случайных графах.

9. Независимые множества в случайном графе. Число независимости $\alpha(G(n,p))$ и его асимптотическое поведение при $p = const$. Поведение числа независимости в динамической модели случайного графа $G(\mathbb{N},p)$.

10. Раскрашиваемость случайного графа. Оценка вероятности отсутствия множества независимости большого размера в случайного графа $G(n,p)$ с помощью неравенства Янсона. Теорема об асимптотическом поведении хроматического числа $\chi(G(n,p))$ для случая $p = const$. Теорема Лучака об оценках хроматического числа случайного графа $G(n,p)$ в общем случае (б/д).

11. Теорема о концентрации хроматического числа случайного графа $G(n,p)$ в двух точках при $p \leqslant n^{-6/7}$.

12. Независимые множества $G(n,p)$ в случае $p = c/n$. Метод интерполяции и закон больших чисел для $\alpha(G(n,p))$.

13. Независимые множества $G(n,p)$ в случае $p = c/n$. Алгоритм Карпа–Сипсера для поиска независимого множества в графе, его применение к деревьям. Аппроксимация случайного графа случайным деревом и нахождение предельной константы для $\alpha(G(n,p))/n$ при фиксированном $c \leqslant 1$.

14. Раскрашиваемость разреженного случайного графа. Теорема Ахлиоптаса – Наора о явном виде значений концентрации в случае $p = c/n$, $c > 1$ (б/д). Оценки пороговой вероятности r-раскрашиваемости случайного графа вида $2r \ln r - \ln r \pm O(1)$.

15. Случайные подграфы неполных графов. Теорема Фриза–Кривелевича–Мартина о фазовом переходе в случайном подграфе квазислучайного графа.

Список литературы

[1] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] S. Jansen, T. Łuczak, A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[3] A. Frieze, M. Karonski, *Introduction to random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[4] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.

[5] A. Frieze, M. Krivelevich, R. Martin, "The emergence of a giant component in random subgraphs of pseudo-random graphs", *Random Structures and Algorithms*, **24**:1 (2004), 42–50.

[6] А.С. Семенов, Д.А. Шабанов, "О числах независимости случайных разреженных гиперграфов", *Дискретная математика*, **28**:3 (2016), 126–144.

[7] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, М., 2000.