Программа и задачи курса “Случайные процессы”

лектор — профессор Д. А. Шабанов

весенний семестр 2020, поток ПМИ

1. Общее понятие случайного процесса (случайной функции), траектории случайного процесса. Примеры случайных процессов: случайное блуждание, процессы восстановления, модель страхования Спарре – Андерсена. Лемма о конечности п.н. процесса восстановления.

2. Производящие функции случайных величин, их основные свойства. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Соотношение между производящими функциями числа частиц в n-м и $(n+1)$-м поколениях. Вывод уравнения для вероятности вырождения процесса.

3. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса.

4. Пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ случайных величин, его основные свойства. Лемма о непрерывности скалярного произведения.

5. Докритические, критические и надкритические ветвящиеся процессы. Предельная теорема для надкритического случая.

6. Пространство траекторий случайного процесса, цилиндрическая сигма-алгебра на нем. Эквивалентное определение случайного процесса, как одного измеримого отображения в пространство траекторий. Конечномерные распределения случайного процесса. Доказательство того, что конечномерные распределения однозначно определяют распределение всего процесса в целом. Лемма об условиях симметрии и согласованности. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса (б/д). Условия согласованности вероятностных мер на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ в терминах характеристических функций (б/д).

7. Процессы с независимыми приращениями. Критерий существования процесса с независимыми приращениями в терминах характеристических функций приращений.

8. Пуассоновский процесс постоянной интенсивности как процесс с независимыми приращениями, доказательство существования. Явная конструкция пуассоновского процесса: процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин. Следствие из явной конструкции: свойства траекторий пуассоновского процесса.

9. Ковариационная функция случайного процесса, ее симметричность и неотрицательная определенность. Гауссовские случайные процессы. Доказательство существования гауссовского процесса с заданными функцией среднего и ковариационной функцией.

10. Винеровский процесс (процесс броуновского движения). Доказательство существования. Теорема о двух эквивалентных определениях винеровского процесса.

11. Модификация случайного процесса. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации (б/д). Доказательство существования непрерывной модификации у винеровского процесса. Теорема о недифференцируемости траекторий винеровского процесса (б/д).

12. Функции Хаара и Шаудера. Три вспомогательных леммы и построение явной конструкции винеровского процесса на $[0, 1]$. Построение явной конструкции винеровского процесса на $\mathbb{R}_+$.

13. Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, согласованность случайного процесса с фильтрацией, естественная фильтрация случайного процесса. Марковские моменты и моменты остановки. Примеры.

14. Процессы Леви. Строго марковское свойство для процессов Леви.

15. Принцип отражения для винеровского процесса. Момент достижения винеровским процессом уровня x. Доказательство того, что он является моментом остановки. Совместное распределение максимума винеровского процесса на отрезке $[0, t]$ и его правого конца. Теорема Башелье.

16. Закон повторного логарифма для винеровского процесса. Смысл закона повторного логарифма.

17. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями. Примеры мартингалов и субмартингалов. Разложение Дуба для согласованных процессов с дискретным временем.

18. Мартингалы. Теорема об остановке для дискретного времени и следствие из нее.

19. Мартингалы. Задача о разорении игрока: мартингальный подход к решению.

20. Мартингалы. Опциональные моменты и теорема об остановке для случая непрерывного времени (б/д). Пример ее применения: теорема об оценке вероятности разорения в модели страхования Крамера–Лундберга.

21. Марковские цепи с дискретным временем. Теорема о независимости “будущего” и “прошлого” при фиксированном “настоящем”. Фазовое пространство, переходные вероятности и начальное распределение марковской цепи. Лемма о свойствах переходных вероятностей, уравнения Колмогорова–Чепмена. Теорема о существовании марковской цепи.

22. Однородные марковские цепи. Примеры: простейшее случайное блуждание на прямой и ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Стационарное и предельное распределения однородной марковской цепи. Свойства цепи с начальным стационарным распределением. Эргодическая теорема для марковских цепей с дискретным временем. Стационарность и предельность эргодического распределения марковской цепи.

23. Классификация состояний марковских цепей: существенные и несущественные состояния, неразложимые классы. Период состояния, лемма о периоде неразложимого класса. Циклические подклассы неразложимого класса, примеры. Возвратные и невозвратные состояния, критерий возвратности. Пример применения: возвратность симметричного случайного блуждания по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$.

24. Задача об оптимальной остановке для марковских цепей. Теорема об оптимальном марковском моменте (б/д). Задача о разборчивой невесте, формулировка и построение марковской цепи. Решение задачи о разборчивой невесте с помощью общей теоремы об оптимальном марковском моменте.

25. Стационарные случайные процессы: стационарность в узком и широком смыслах. Доказательство эквивалентности этих понятий для гауссовских процессов. Стационарность в узком смысле марковской цепи с начальным стационарным распределением.

26. Неотрицательно определенные в комплексном смысле функции одной переменной. Теорема Герглотца (б/д) и теорема Бохнера – Хинчина (б/д). Спектральная плотность стационарной в широком смысле последовательности, ее вычисление с помощью ряда Фурье. Спектральная плотность стационарного в широком смысле процесса, ее вычисление с помощью формулы обращения.

27. Слабая сходимость вероятностных мер в метрических пространствах, борелевская сигма-алгебра в метрическом пространстве. Теорема Александрова.

28. Цилиндрическая и борелевская сигма-алгебры на $C[0,1]$. Сходимость по распределению случайных процессов с непрерывными траекториями на $[0,1]$, наследование сходимости при взятии непрерывной функции. Принцип инвариантности Донскера–Прохорова (б/д).

29. Критерий Колмогорова в математической статистике. Доказательство независимости распределения статистики $\widehat{D}_n$ от вида истинной функции распределения. Лемма о сходимости $\sqrt{n}\widehat{D}_n$ по распределению к максимуму модуля броуновского моста на $[0,1]$.

30. Распределение броуновского моста как условное распределение винеровского процесса при условии $W_1 = 0$. Вычисление совместного распределения (m_n, M_n, S_n) для простейшего симметричного случайного блуждания. Вычисление совместного распределения (m, M, W_1) для винеровского процесса. Нахождение распределения максимума модуля броуновского моста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. — 4-е изд. — М.: МЦНМО, 2007.

2. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005.

3. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — 4-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2003.

4. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. — М.: Мир, 1984.

6. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. — 2-е изд. — М.: Наука.Физматлит, 1996.

7. *Ватутин В.А.* Ветвящиеся процессы и их применения. — Лекционные курсы НОЦ. Т.8 — М.:МИАН, 2008.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Ветвящиеся процессы

1. Найдите производящую функцию числа частиц в n-м поколении, если производящая функция числа потомков одной частицы равна

   а) $pz + 1 - p$, б) $(1-p)/(1-pz)$, в) $1 - p(1-z)^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

2. Найдите вероятности вырождения для ветвящихся процессов с производящей функцией числа потомков одной частицы

   а) $(1-p)/(1-pz)$, б) $1 - p(1-z)^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, в) $(1 + z + z^2 + z^3)/4$.

3. а) Ветвящийся процесс имеет следующий закон ξ распределения потомков одной частицы:
$$\mathsf{P}(\xi = 0) = 1/4, \ \ \mathsf{P}(\xi = 2) = 1/2, \ \ \mathsf{P}(\xi = 6) = 1/4.$$
   Верно ли, что вероятность вырождения принадлежать интервалу $(1/4, 1/3)$?

   б) Ветвящийся процесс имеет пуассоновский закон $Pois(2)$ распределения числа потомков одной частицы. Верно ли, что вероятность вырождения принадлежать интервалу $(1/4, 1/3)$?

4. Найдите 1) распределение момента вырождения $\tau = \min\{n : X_n = 0\}$ и 2) асимптотику вероятности невырождения (т.е. вероятности $\mathsf{P}(X_n > 0)$) для ветвящихся процессов с производящей функцией числа потомков одной частицы

   а) $pz + 1 - p$, б) $1 - p(1-z)^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

5. Пусть ξ — число потомков частицы в ветвящемся процессе Гальтона-Ватсона $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$. Обозначим $\mathsf{E}\xi = \mu$, $\mathsf{D}\xi = \sigma^2$. Найдите $\mathsf{E}X_n$ и $\mathsf{D}X_n$.

6. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс с законом размножения частиц ξ. Обозначим через $Y_n = X_n + \ldots + X_0$ — общее число частиц в процессе за время n, а через $\varphi_{Y_n}(z)$ — его производящую функцию. Докажите, что
$$\varphi_{Y_n}(z) = s\varphi_\xi(\varphi_{Y_{n-1}}(z)).$$

7. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс с законом размножения частиц ξ. Обозначим через $Y_n = X_n + \ldots + X_0$ — общее число частиц в процессе за время n, а через $\varphi_{Y_n}(z)$ — его производящую функцию. Пусть Y — это общее число частиц в процессе за все время (может быть, $Y = +\infty$). Докажите, что для любого $z \in [0, 1)$ существует предел
$$\rho(z) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(z).$$
Докажите, что $\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathsf{P}(Y = k)$. Чему равно $\rho(1) := \lim\limits_{z\to 1-0} \rho(z)$?

8. Пусть ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона построен по случайной величине ξ, имеющей производящую функцию $\varphi(z) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-z}$. Найдите

   а) вероятность вырождения процесса,

   б) производящую функцию общего числа частиц процесса,

   в) вероятность того, что в процессе было всего 10 частиц.

2. Существование и распределения случайных процессов.

1 Пусть T — бесконечное множество, а $N(T)$ — множество всех счетных подмножеств T. Докажите, что тогда цилиндрическая σ-алгебра $\mathcal{B}_T$ на $S = \times_{t\in T} S_t$ удовлетворяет равенству
$$\mathcal{B}_T = \bigcup_{U\in N(T)} \mathcal{B}_U,$$
где $\mathcal{B}_U$ — цилиндрическая σ-алгебра на $\times_{t\in U} S_t$.

2 Пусть $T = [0, 1]$, $(S_t, \mathcal{B}_t) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ для любого $t \in T$. Тогда пространство траекторий $S = \times_{t\in T} S_t$ — пространство вещественных функций на $[0, 1]$. Верно ли, что $C[0, 1] \in \mathcal{B}_T$?

3 Приведите пример вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, двух случайных процессов X и Y на нем и множества $G \notin \mathcal{B}_T$ (т.е. G — это подмножество пространства траекторий, не принадлежащего цилиндрической σ-алгебре) таких, что $\{X \in G\} \in \mathcal{F}$, $\{Y \in G\} \notin \mathcal{F}$.

4 Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ в $\mathbb{R}^T$ — это минимальная σ-алгебра, содержащая все элементарные цилиндры $C(t, B) = \{x = (x(s), s \in T) : x(t) \in B\}$, где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Докажите, что
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \sigma\left(\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_n}(B_n) : n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in T,\ B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right)$$
и
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \sigma\left(\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_n}((a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)) : n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in T,\ a_i < b_i\right),$$
где $\pi_{t_1,\ldots,t_n}$ переводит функцию $(x(s), s \in T)$ в вектор $(x(t_1), \ldots, x(t_n))$.

3. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс

1. Пусть $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ — процесс с независимыми приращениями. Докажите, что для любых $t > s$ случайная величина $X_t - X_s$ не зависит от $\sigma(X_u, u \leqslant s)$.

2. Задан процесс $\{Y_t = \sum\limits_{j=1}^{N_t} \xi_j,\ t \geqslant 0\}$, где $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие также от пуассоновского процесса $N = \{N_t, t \geqslant 0\}$ интенсивности λ. Докажите, что процесс Y_t имеет независимые приращения.

3. Пусть $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ — независимые экспоненциальные случайные величины с параметром λ, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, а $N = \{N_t, t \geqslant 0\}$ — процесс восстановления, построенный по ним (пуассоновский процесс интенсивности λ). Для каждого $t > 0$ обозначим $V_t = S_{N_t+1} - t$ (“перескок”) и $U_t = t - S_{N_t}$ (“недоскок”).

   а) Вычислите вероятность $\mathsf{P}(V_t > v, U_t > u) =?$

   б) Докажите, что V_t и U_t — независимы, и что $V_t \sim Exp(\lambda)$.

   в) Вычислите функцию распределения U_t и $\mathsf{E}U_t$.

4. Пусть $N = (N_t, t \geqslant 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Найдите математическое ожидание числа таких его скачков на отрезке $[0, T]$, что

   а) в их правой a-окрестности, $a > 0$, нет других скачков (эта окрестность может выходить и за пределы отрезка),

   б) в их левой a-окрестности, $a > 0$, нет других скачков.

5. Пусть $(N_t, t \geqslant 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Найдите предел п.н. N_t/t при $t \to +\infty$.

6. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ — процесс восстановления для независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$. Верно ли, что процесс X_t всегда имеет независимые приращения?

4. Гауссовские процессы. Винеровский процесс

1. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что следующие процессы тоже винеровские

   а) $X_t = t\ W_{1/t} I\{t > 0\}$, б) $X_t = \sqrt{c}\ W_{t/c}$, $c > 0$, в) $X_t = W_{t+a} - W_a$, $a > 0$, г) $X_t = W_t\, I\{t < T\} + (2W_T - W_t) I\{t \geqslant T\}$.

2. Пусть $(Y_t, t \in [0,1])$ — гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $r(s,t) = \min(s,t) - st$. Докажите, что такой процесс существует и что процесс $X_t = (t+1) Y_{t/(t+1)}$, $t \geqslant 0$ является винеровским.

3. Пусть $W_t^1, \ldots, W_t^d$ — независимые винеровские процессы. Докажите, что с вероятностью 1 процесс $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d)$ (многомерный винеровский процесс) выйдет из шара произвольного фиксированного радиуса r с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^d$.

4. Докажите, что существует гауссовский процесс $X = (X_t, t \in \mathbb{R}_+^d)$ с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией
$$R(s,t) = \prod_{k=1}^{d} \min(s_k, t_k),$$
где $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d$.

5. Пусть последовательность положительных чисел $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1/2} < \infty$, а $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс.. Докажите, что тогда $|W_{t_n}| \to +\infty$ п.н. с ростом n.

6. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что с вероятностью 1 его траектория имеет неограниченную вариацию на произвольном отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, т.е. что
$$\sup_T \sum_{i=1}^{n} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = +\infty \text{ п.н.},$$
где $T = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$.

7. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Вычислите для $t > 0$ предел в L^2 при $n \to \infty$ у выражения
$$\sum_{i=1}^{n} W_{t(i-1)/n} \left(W_{ti/n} - W_{t(i-1)/n}\right).$$

8. Докажите локальный закон повторного логарифма для винеровского процесса:
$$\mathsf{P}\left(\limsup_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = 1\right) = 1.$$

9. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — независимые $\mathcal{N}(0,1)$ случайные величины. Докажите, что процесс
$$X_t = \frac{\xi_0 t}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}\, \xi_k$$
является винеровским на отрезке $[0,\pi]$ (ряд понимается, как предел частичных сумм в L^2).

Указание: надо разложить функцию $I_{[0,t]}(x)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе на $[0,\pi]$, составленной из $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx)$.

5. Марковские моменты. Принцип отражения для винеровского процесса

1. Пусть задана фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$, а $\tau_1, \tau_2, \dots$ — марковские моменты относительно $\mathbb{F}$. Докажите, что случайные величины

$$\sum_{k=1}^{m} \tau_k, \quad \prod_{k=1}^{m} \tau_k, \quad \sup_k \tau_k, \quad \inf_k \tau_k$$

тоже являются марковскими моментами относительно $\mathbb{F}$.

2. Пусть τ – марковский момент относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$. Докажите, что тогда марковским моментом будет и величина

$$\tau_n := \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-n} \, I_{A_{n,k}},$$

где $A_{n,1} = \{0 \leqslant \tau \leqslant 2^{-n}\}$, $A_{n,k} = \{(k-1)2^{-n} < \tau \leqslant k2^{-n}\}$ при $k \geqslant 2$.

3. Пусть τ — марковский момент относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$, где $T = \mathbb{N}$ или $\mathbb{R}_+$. Положим

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \in T \;\; A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

Докажите, что $\mathcal{F}_\tau$ является сигма-алгеброй и что τ является $\mathcal{F}_\tau$-измеримой случайной величиной.

4. Пусть τ — марковский момент относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$, а случайный процесс $(X_t, t \in T)$ согласован с $\mathbb{F}$. Докажите, что X_τ является $\mathcal{F}_\tau$-измеримым (считаем, что $X_\tau = +\infty$, если $\tau = +\infty$), если

   а) $T = \mathbb{N}$;

   б) $T = \mathbb{R}_+$ и траектории $(X_t, t \in T)$ непрерывны справа.

5. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Положим $\tau_y = \min\{t : \; W_t = y\}$ для $y > 0$. С помощью теоремы Башелье найдите плотность случайной величины τ_y, а также $\mathsf{E}\tau_y$.

6. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Положим $\tau = \min\{t : \; W_t = y\}$ для некоторого $y > 0$. Найдите плотность случайной величины $Y_a = \sup_{t \in [\tau, \tau + a]} W_t$.

7. Найдите

$$\mathsf{P}\left(W_t \text{ не имеет нулей на отрезке } [s, u]\right),$$

где W_t — винеровский процесс, а $u > s > 0$.

6. Мартингалы

1. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что процесс $Y_t = W_t^2 - t$ является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.

2. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Найдите все такие пары $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, что процесс
$$X_t = \exp\{\alpha W_t + \beta t\}, \ t \geq 0$$
является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом) относительно естественной фильтрации процесса W_t.

3. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — такая последовательность случайных величин, что для любого n существует плотность $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ — другая последовательность случайных величин, причем также для любого n существует плотность $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Докажите, что процесс
$$X_n = \frac{g_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)}$$
является мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ n \in \mathbb{N})$.

4. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс, а τ — момент остановки относительно его естественной фильтрации. Докажите, что процесс
$$X_t = W_{t \wedge \tau}, \ t \geqslant 0$$
является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.

   Указание: надо аппроксимировать τ марковскими моментами с конечным числом значений.

5. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс, а $\tau = \min\{t : \ |W_t| = 1\}$. Вычислите $\mathsf{E}\tau$.

6. Пусть $(S_n, n \in \mathbb{N})$ — простейшее случайное блуждание с вероятностью шага вправо p. Пусть $a < x < b$ — целые числа, а $X_n = x + S_n$, $n \geqslant 1$. Обозначим $\tau = \min\{n : S_n \in \{a, b\}\}$ — момент выхода процесса X_n из полосы. Найдите $\mathsf{E}\tau < +\infty$

7. Марковские цепи

1. Докажите, что процесс $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ со значениями в не более чем счетном множестве $\mathcal{X}$ является марковской цепью тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ и любых $a_{n+1}, \ldots, a_0 \in \mathcal{X}$ выполнено
$$\mathsf{P}\left(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n, \ldots, X_0 = a_0\right) = \mathsf{P}\left(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n\right),$$
всегда, когда вероятности условий положительны.

2. Пусть ξ_n — однородная марковская цепь с фазовым пространством $S = \{1, 2, 3\}$, начальным состоянием $\xi_0 = 1$ п.н. и матрицей переходных вероятностей
$$\begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix}.$$
Положим $\eta_n = I\{\xi_n = 1\} + 2I\{\xi_n \neq 1\}$. Докажите, что η_n — тоже однородная марковская цепь и найдите ее матрицу переходных вероятностей.

3. Цепь Маркова $(\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности $\mathsf{P}(\xi_{n+1} = k+1 | \ \xi_n = k) = p$, $\mathsf{P}(\xi_{n+1} = k | \ \xi_n = k) = 1-p$, $k, n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$. Найдите распределение ξ_n. Докажите, что последовательность $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \min\{n : \ \xi_n = k\}$ также является цепью Маркова и найдите ее переходные вероятности.

4. Пусть $(X_n, n \geq 0)$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на множестве $\{-1, 0, 1\}$. Рассмотрим процесс
$$Y_n = X_0 X_1 + X_1 X_2 + \ldots + X_{n-1} X_n.$$
Докажите, что X_n является мартингалом относительно фильтрации
$$\mathbb{F} = (\sigma(X_1, \ldots, X_n), n \in \mathbb{Z}_+),$$
но не является марковской цепью.

5. Имеются две урны, содержащие в начальный момент времени соответственно k_1 и k_2 шаров, причем $k_1 + k_2 = k$. В каждый момент времени n с вероятностью $1/k$ выбирается один из этих шаров и перекладывается из той урны, где он лежал, в другую. Пусть X_n — это число шаров в первой урне в момент времени n. Докажите, что $(X_n, n \in \mathbb{N})$ — однородная марковская цепь и ее стационарное распределение. Существует ли у подобной цепи предельное распределение?

6. Пусть $(\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями $\{0, 1, 2, 3\}$ и следующим распределением:
$$\mathsf{P}(\xi_n = 0) = 1/7, \ \ \mathsf{P}(\xi_n = 1) = 2/7, \ \ \mathsf{P}(\xi_n = 2) = 3/7, \ \ \mathsf{P}(\xi_n = 3) = 1/7.$$
Рассматриваются процессы $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n (\mod 4)$, $n \in \mathbb{N}$ (остаток от деления суммы на 4) и $Y_n = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n (\mod 4)$. Докажите, что $(X_n, n \in \mathbb{N})$ и $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ являются однородными марковскими цепями и найдите их предельные распределения.

7. Докажите, что если однородная марковская цепь $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ с конечным числом состояний неразложима и апериодична, то найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $p_{ij}(n) > 0$ при всех i, j и $n \geq m$, $n \in \mathbb{N}$.

8. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с законом размножения частиц $Pois(3)$. Рассматривая его как однородную марковскую цепь, найдите переходные вероятности $(p_{ij}, i, j \in \mathbb{Z}_+)$ за один шаг. Является ли данная цепь неразложимой?

9. Пусть $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — простейшее случайное блуждание на $\mathbb{Z}$ с вероятностью шага вправо p. Найдите вероятность возвращения в нуль, т.е. $\mathsf{P}(\exists n : \ S_n = 0)$.

10. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — модель простейшего случайного блуждания на $\mathbb{Z}_+$ с отражением в нуле, т.е. если $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые случайные величины, принимающие значения 1 и -1 с вероятностями p и $q = 1 - p$, соответственно. Тогда
$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + \xi_n, & \text{если } X_{n-1} > 0; \\ 1, & \text{если } X_{n-1} = 0. \end{cases}$$
При каких соотношениях между p и q цепь является возвратной (т.е. таковы все ее состояния)? Найдите стационарные и предельное распределения цепи или докажите, что их не существует.

11. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — модель простейшего случайного блуждания на $\{0, 1, \ldots, N\}$ с отражением в нуле и N, т.е. если $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые случайные величины, принимающие значения 1 и -1 с вероятностями p и $q = 1 - p$, соответственно. Тогда

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + \xi_n, & \text{если } 0 < X_{n-1} < N; \\ 1, & \text{если } X_{n-1} = 0; \\ N - 1, & \text{если } X_{n-1} = N; \end{cases}$$

Докажите, что подобная цепь неразложима. Найдите ее период и стационарное распределение. Докажите, что у нее не существует предельного распределения.

12. Рассмотрим задачу об оптимальной остановке в задаче 8: для заданной функции $g(x)$ требуется отыскать такой момент остановки τ^* относительно естественной фильтрации $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$, что
$$\mathsf{E}_x g(X_{\tau^*}) = \sup_\tau \mathsf{E}_x g(X_\tau).$$
для всех $x \in \{0, \ldots, N\}$. Найдите оптимальный момент τ^*.

8. Стационарные процессы

1. Пусть $N = \{N(t), t \geqslant 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ, а случайная величина η не зависит от N, причем $\mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = 1/2$. Является ли процесс $X_t = \eta(-1)^{N_t}$ стационарным, и в каком смысле?

2. Пусть f — периодическая функция на $\mathbb{R}$ с периодом $T > 0$. Случайная величина ξ равномерно распределена на $[0, T]$. Случайный вектор (ζ, η) не зависит от ξ. Докажите, что процесс $X_t = \zeta \cdot f(\eta t + \xi)$ стационарен в узком смысле.

3. Пусть $W_t^{(1)}$ и $W_t^{(2)}$ — независимые винеровские процессы. Для любого $t \in \mathbb{R}$ положим $X_t = W_t^{(1)} I\{t \geqslant 0\} + W_{-t}^{(2)} I\{t < 0\}$. Докажите, что процесс $Y_t = \frac{1}{h}(X_t - X_{t-h})$ является стационарным в широком смысле. Найдите его ковариационную функцию и спектральную плотность.

4. Пусть $(X_t, t \in \mathbb{R})$ — гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $r(s,t) = a\, e^{-b|s-t|}$, $a, b > 0$. Докажите, что такой процесс существует и найдите его спектральную плотность.

5. Пусть $(X_t, t \in \mathbb{R})$ — стационарный в широком смысле гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и спектральной мерой Q. Найдите спектральные меры процессов: а) $Y_t = X_t^2$, $t \in \mathbb{R}$; б) $Y_t = e^{X_t}$, $t \in \mathbb{R}$.

9. Слабая сходимость случайных процессов

1. Приведите пример такой последовательности случайных элементов $(X_n, n \in \mathbb{N})$ со значениями в $C[0, 1]$, что последовательность их распределений является плотной, но не имеет предела в смысле слабой сходимости.

2. а) Докажите, что если последовательность случайных процессов $\{X^{(n)} = (X_t^{(n)}, t \in [0,1]), n \in \mathbb{N}\}$ сходится по распределению к процессу $\{X = (X_t, t \in [0,1]), n \in \mathbb{N}\}$, то имеет место сходимость конечномерных распределений: для любого $m \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_m$

$$(X_{t_1}^{(n)}, \ldots, X_{t_m}^{(n)}) \xrightarrow{d} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}).$$

   б) Докажите, что из сходимости по распределению всех конечномерных распределений не следует слабая сходимость случайных процессов.

3. Докажите, что меры Дирака δ_{x_n} на метрическом пространстве (S, ρ) имеют слабый предел тогда и только тогда, когда x_n сходится по метрике ρ к некоторому $x \in S$ (здесь $\delta_y(B) = I\{y \in B\}$ для $y \in S$).

4. Выведите центральную предельную теорему из принципа инвариантности.

5. Используя принцип инвариантности, найдите распределение максимума винеровского процесса $(W_t, t \geq 0)$ на отрезке $[0,1]$.

6. Докажите, что $\mathsf{Q}^\varepsilon \xrightarrow{w} \mathsf{P}_{W^0}$ при $\varepsilon \to 0$, где

$$\mathsf{Q}^\varepsilon(A) = \mathsf{P}(W \in A | 0 < W_1 < \varepsilon)$$

   для любого борелевского $A \subset C[0,1]$, $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс, а $W_t^0 = W_t - tW_1$ — броуновский мост.