

# Вопросы к зачету по курсу “Теория гиперграфов”

лектор — профессор Д.А. Шабанов

весенний семестр 2020

1. Теорема Турана для графов. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости произвольного графа. Числа Турана  $ex(n, G)$  для произвольного графа  $G$ . Верхняя оценка числа Турана  $ex(n, K_{s,t})$ , следствие из нее — оценки числа ребер дистанционного графа в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ .
2. Теорема Эрдеша–Стоуна об асимптотическом поведении  $ex(n, G)$ .
3. Числа Турана  $T(n, b, k)$  для гиперграфов, понятие  $(n, b, k)$ -системы. Рекуррентные неравенства для чисел  $T(n, b, k)$ , простая нижняя оценка  $T(n, b, k)$ . Турановские плотности  $t(b, k)$ , рекуррентное неравенство для турановских плотностей. Верхняя оценка турановской плотности  $t(b, k)$  (первая конструкция А. Сидоренко).
4. Верхняя оценка турановской плотности  $t(2k + 1, 2k)$  (вторая конструкция А. Сидоренко). Оценка турановской плотности с помощью случайного гиперграфа (третья конструкция А. Сидоренко).
5. Теорема Турана для гиперграфов и нижняя оценка Спенсера для  $T(n, b, k)$ . Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости  $k$ -однородного гиперграфа. Нижняя оценка для  $t(b, k)$ , ее порядок при фиксированном  $k$  и растущем  $b$ .
6. Теорема Турана для графов с большим обхватом. Нижняя оценка Айтаи–Комлоша–Семереди (теорема Ширера) для числа независимости графа без треугольников со средней степенью вершины  $t$ . Следствие: верхняя оценка числа Рамсея  $R(3, t)$ . Точность оценки в теореме Айтаи–Комлоша–Семереди (существование графов с небольшим числом независимости и ограниченной средней степенью вершины).
7. Верхняя оценка числа Рамсея  $R(s, t)$  при фиксированном  $s$  и растущем  $t$ .
8. Теорема Ширера о числе независимости графа, не содержащего подграфов, изоморфных  $K_r$ .
9. Теорема Алона о нижней оценке числа независимости графа, в котором у каждой вершины подграф его соседей имеет ограниченное хроматическое число.
10. Теорема о нижней оценке числа независимости  $k$ -однородного гиперграфа с обхватом больше 4 и со средней степенью вершины  $d$  (б/д). Аналогичная теорема Рёдья–Дьюка–Лефманна для простых гиперграфов. Следствие: опровержение гипотезы Хейлбронна в комбинаторной геометрии.

11. Экстремальная задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, простая верхняя оценка. Вероятностная нижняя оценка  $m(k, r)$ . Следствие: нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Вероятностная верхняя оценка  $m(k, r)$ . Теорема Алона об асимптотическом поведении  $m(k, r)$  при растущем  $r$ .
12. Критерий Плухара  $r$ -раскрашиваемости гиперграфа в терминах существования упорядоченных  $r$ -цепей. Нижняя оценка Радхакришнана–Сринивасана для  $m(k, 2)$  (доказательство Черкашина–Козика).
13. Локальная лемма Ловаса. Различные варианты подбора параметров: симметричный, несимметричный и полиномиальный варианты. Применение последнего варианта: нижняя оценка внедиагонального числа Рамсея  $R(3, t)$ .
14. Теорема Эрдеша–Ловаса об оценке максимальной степени ребра (вершины) в однородном гиперграфе с большим хроматическим числом. Следствие: наилучшая нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Задача Эрдеша–Ловаса о раскрасках простых гиперграфов. Лемма о свойствах простых гиперграфов с большим хроматическим числом. Следствие: нижняя оценка  $m^*(k, r)$ . Теорема Косточки–Мубай–Рёдля–Тетали о нижней оценке  $m^*(k, r)$  при больших  $r$ .
15. Теорема Сауэра о существовании однородных регулярных гиперграфов с большим обхватом.
16. Теорема Косточки–Рёдля о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, большим обхватом и ограниченными степенями вершин.
17. Упаковки гиперграфов, теорема Лу–Секеи об отрицательных корреляциях в пространстве случайных биекций. Теорема о достаточном условии упаковки гиперграфов. Следствия: достаточное условие совершенной  $G$ -упаковки; нижняя оценка для минимальной степени вершины, гарантирующей существование совершенного  $k$ -сочетания.
18. Числа Ван дер Вардена  $W(k, r)$ , нижняя оценка в общем случае. Оценки  $W(3, r)$ : нижняя оценка Мозера, верхняя оценка Грэма–Шолимоши.