Программа курса
«Теория гиперграфов»

лектор — Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики ФИВТ,
бакалавриат 8 семестр

1. Основные определения теории гиперграфов. Понятия независимых множеств, циклов и правильных раскрасок в гиперграфах. Основные характеристики гиперграфов: максимальная степень вершины, число независимости, хроматическое число.

2. Теорема Турана для графов. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости произвольного графа. Числа Турана $ex(n, G)$ для произвольного графа G. Теорема Эрдеша–Стоуна об асимптотическом поведении $ex(n, G)$ (б/д). Верхняя оценка числа Турана $ex(n, K_{s,t})$, следствие из нее — оценки числа ребер дистанционного графа в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

3. Числа Турана $T(n, k, b)$ для гиперграфов, понятие (n, k, b)-системы. Рекуррентные неравенства для чисел $T(n, k, b)$, простая нижняя оценка $T(n, k, b)$. Турановские плотности $t(k, b)$, рекуррентное неравенство для турановских плотностей. Верхняя оценка турановской плотности $t(k, b)$ (конструкция А. Сидоренко).

4. Теорема Турана для гиперграфов и нижняя оценка Спенсера для $T(n, k, b)$. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости k-однородного гиперграфа. Нижняя оценка для $t(k, b)$, ее порядок при фиксированном k и растущем b.

5. Теорема Турана для графов с большим обхватом. Нижняя оценка Айтаи–Комлоша–Семереди для числа независимости графа без треугольников со средней степенью вершины d. Следствие: верхняя оценка числа Рамсея $R(3, t)$. Точность оценки в теореме Айтаи–Комлоша–Семереди (существование графов с небольшим числом независимости и ограниченной средней степенью вершины). Верхняя оценка числа Рамсея $R(s, t)$ при фиксированном s и растущем t.

6. Теорема Ширера о числе независимости графа, не содержащего подграфов, изоморфных K_r. Теорема Алона о нижней оценке числа независимости графа, в котором у каждой вершины подграф его соседей имеет ограниченное хроматическое число.

7. Теорема о нижней оценке числа независимости k-однородного гиперграфа с обхватом больше 4 и со средней степенью вершины d (б/д). Аналогичная теорема Рёдля–Дьюка–Лефманна для простых гиперграфов. Следствие: опровержение гипотезы Хейлбронна в комбинаторной геометрии.

8. Экстремальная задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, простая верхняя оценка. Вероятностная нижняя оценка $m(k,r)$. Следствие: нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Вероятностная верхняя оценка $m(k,r)$.

9. Теорема Алона об асимптотическом поведении $m(k,r)$ при растущем r. Критерий Плухара r-раскрашиваемости гиперграфа в терминах существования упорядоченных r-цепей. Метод Плухара: нижняя оценка Черкашина–Козика для $m(k,2)$.

10. Локальная лемма: общий, симметричный и несимметричный варианты. Теорема Эрдеша–Ловаса об оценке максимальной степени вершины в однородном гиперграфе с большим хроматическим числом. Следствие: наилучшая нижняя оценка диагонального числа Рамсея.

11. Задача Эрдеша–Ловаса о раскрасках простых гиперграфов. Их теорема о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом и большим обхватом (б/д). Лемма о свойствах простых гиперграфов с большим хроматическим числом. Следствие: нижняя оценка $m^*(k,r)$. Теорема Косточки–Мубаи–Рёдля–Тетали о нижней оценке $m^*(k,r)$ при больших r.

12. Теорема Сауэра о существовании однородных регулярных гиперграфов с большим обхватом. Теорема Косточки–Рёдля о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, большим обхватом и ограниченными степенями вершин.

13. Упаковки гиперграфов, теорема Лу–Секеи о достаточном условии упаковки гиперграфов. Следствие: оценка для нижней степени вершины, гарантирующей существование совершенного паросочетания.

14. Элементы теории Рамсея. Числа Ван дер Вардена $W(k,r)$, нижняя оценка в диагональном случае. Нижняя оценка Мозера для $W(3,r)$, верхняя оценка Грэма–Шолимоши.

Список литературы

[1] A. F. Sidorenko, “What we know and what we do not know about Turán numbers”, *Graphs and Combinatorics*, **11** (1995), 179–199.

[2] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[3] I. Bárány, “Applications of Graph and Hypergraph Theory in Geometry”, *Combinatorial and Computational Geometry*, **52** (2005), 31–50.

[4] А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, “Задача Эрдеша – Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы”, *Успехи математических наук*, **66**:5 (2011), 109–182.

[5] A. V. Kostochka, “Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey”, *More Sets, Graphs and Numbers*, Bolyai Society Mathematical Studies, **15**, eds. E. Győri, G. O. H. Katona, L. Lovász, Springer, 2006, 175–198.

[6] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.

[7] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, North Holland, Amsterdam, 1973, 609–627.

[8] A. V. Kostochka, V. Rödl, "Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number", *Random Structures and Algorithms*, **36**:1 (2010), 46–56.

[9] R. L. Graham, B. L. Rotshild, J. H. Spencer, *Ramsey theory*, 2nd edition, Wiley, New York, 1990.