Задачи по курсу случайных графов. Часть 4

1. Пусть $G(n,n,p)$ — случайный двудольный граф. Докажите, что
$$\mathsf{P}(G(n,n,p)\text{ связен}) \to \begin{cases} 0, & \text{если } np-\ln n\to -\infty; \\ 1, & \text{если } np-\ln n\to +\infty. \end{cases}$$

2. Пусть $m = \left\lfloor \frac{n}{2}(\ln n - \ln\ln\ln n)\right\rfloor$. Докажите, что в этом случае случайный граф в равномерной модели $G(n,m)$ с вероятностью, стремящейся к 1, состоит из гигантской компоненты и изолированных вершин, причем число последних не превосходит $\ln n$.

3. Пусть $np = \Theta(\ln n)$, а $u = \frac{n(\ln\ln n)^2}{\ln n}$. Докажите, что тогда с вероятностью, стремящейся к 1, для $G(n,p)$ будут выполнены два свойства

   (i) между любыми двумя непересекающимися подмножествами вершин размера не меньше u есть ребро;

   (ii) каждое подмножество вершин S размера не более $2u$ содержит внутри себя не более $(\ln\ln n)^3|S|$ ребер.

4. Пусть $y_n = 2np - \ln n - 2\ln\ln n$, а X_n – число “вишен” в $G(n,p)$. Докажите, что

   - если $y_n \to -\infty$ и $n^3p^2\to+\infty$, то X_n сходится по вероятности к $+\infty$;
   - если $y_n\to+\infty$, то X_n сходится по вероятности к нулю.

5. Пусть $y_n = 2np - \ln n - 2\ln\ln n$, а X_n – число “вишен” в $G(n,p)$. Докажите, что если $y_n\to c$, то X_n сходится по распределению к пуассоновскому с параметром $\frac{1}{8}e^{-c}$, а вероятность того, что будет ровно одна “вишня” и число изолированных вершин нечетно сходится к $\frac{1}{16}e^{-c}\exp\left\{-\frac{1}{8}e^{-c}\right\}$.

6. Докажите, что в графовом случайном процессе с вероятностью, стремящейся к 1, моменты исчезновения последней изолированной вершины и появления совершенного паросочетания совпадают.

7. Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф с долями V_1 и V_2, имеющими одинаковую мощность n. Докажите, что если G не обладает совершенным паросочетанием, то найдется такое $i = 1,2$ и $S\subset V_i$, что

   (i) $|S| = |N(S)|+1$, где $N(S)$ — множество соседей S;

   (ii) $|S|\leqslant \lceil n/2\rceil$;

   (iii) каждая вершина $N(S)$ имеет не менее двух соседей в S.

8. Используя первую и седьмую задачи,

   а) докажите, что пороговая вероятность появления в $G(n,n,p)$ совершенного паросочетания совпадает с пороговой вероятностью исчезновения изолированных вершин;

   б) вычислите пороговую вероятность появления в $G(n,n,p)$ совершенного паросочетания.

9. Пусть $p = \frac{1+\varepsilon}{n}$ для достаточно малой положительной константы ε. Рассмотрим пошаговую (“по одному ребру”) работу алгоритма Depth First Search. Положим $N_0 = \frac{\varepsilon n^2}{2}$.

   (a) Пусть X_t — число шагов алгоритма за время t, на которых мы увеличивали путь. Докажите, что с вероятностью, стремящейся к 1,
   $$\left| X_{N_0} - \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)n}{2} \right| < n^{2/3}.$$

   (b) Докажите, что с вероятностью, стремящейся к 1, в момент времени N_0 число “мертвых” вершин будет меньше $n/3$.

   (c) Докажите, что с вероятностью, стремящейся к 1, в момент времени N_0 будет набран путь длины не меньше $\frac{\varepsilon^2 n}{5}$.

СРОК СДАЧИ вторник, 23 марта, до 11:00.

Решения принимаются в электронном виде, набранные в TeX (или как-то еще). Решения надо присылать на адрес dmitry.shabanov@phystech.edu