

Задачи по курсу случайных графов. Часть 5

1. Пусть X_n равно либо $\omega(G(n, p))$, либо $\alpha(G(n, p))$, либо $\chi(G(n, p))$. Докажите, что тогда для любой функции $p = p(n)$ и любого $\delta > 0$ выполнено

$$\frac{X_n - \mathbf{E}X_n}{n^{1/2+\delta}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

2. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая величина $d_\varepsilon > 0$, что при $d_\varepsilon < np = o(n)$ выполнено

$$\mathbf{P} \left(\alpha(G(n, p)) \leq \frac{2}{p} (\ln(np) - \ln \ln(np) - \ln 2 + 1 + \varepsilon) \right) \rightarrow 1.$$

3. Граф G называется k -вырожденным, если любой его подграф содержит вершину степени не более k . Обозначим через $D(G)$ минимальное такое k , что G является k -вырожденным. Докажите, что

$$\chi(G) \leq D(G) + 1 \leq 2m(G) + 1.$$

4. Докажите следующие оценки числа ребер в малых подграфах случайного графа. С вероятностью, стремящейся к 1,

(а) при $np \geq C_0$ для подходящей константы C_0 любой подграф $F \subset G(n, p)$ на не более чем $n/(2(\ln np)^2)$ вершинах удовлетворяет неравенству $m(F) \leq np/(\ln np)^2$;

(б) при $p \leq (\ln n)^2/\sqrt{n}$ любой подграф $F \subset G(n, p)$ на не более чем $2\sqrt{n \ln n}$ вершинах удовлетворяет неравенству $m(F) \leq (\ln n)^3$;

(с) при $p \leq n^{-6/7}$ любой подграф $F \subset G(n, p)$ на не более чем $70\sqrt{n \ln n}$ вершинах удовлетворяет неравенству $m(F) \leq 1.45$.

5. Докажите, что при $np \leq 1.001$ с вероятностью, стремящейся к 1, любой подграф $F \subset G(n, p)$ удовлетворяет неравенству $m(F) \leq 1.45$. И, значит,

$$\mathbf{P} (\chi(G(n, p)) \leq 3) \rightarrow 1.$$

6. Пусть $np = c > 1$ — фиксировано. С помощью неравенства Янсона докажите, что тогда с вероятностью $1 - o(1/\ln n)$ случайный граф содержит простой цикл длины $2\lfloor \ln \ln n \rfloor + 1$.

7. Докажите, что свойство двудольности случайного графа имеет пороговую вероятность $1/n$, которая точна только с одной стороны. А именно, найдите пределы вероятностей

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\chi(G(n, c/n)) = 2) =? \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\chi(G(n, c/n)) = 3) =?$$

при фиксированном $c \in (0, 1)$.

8. Пусть $r \geq 3$ — фиксированное натуральное число. Докажите, что для любого постоянного $c > 2r \ln r - \ln r$ случайный граф $G(n, c/n)$ не является r -раскрашиваемым с большой вероятностью, т.е. выполнено

$$\mathbb{P}(\chi(G(n, c/n)) > r) \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

СРОК СДАЧИ вторник, 27 апреля, до 11:00.

Решения принимаются в электронном виде, набранные в TeX (или как-то еще). Решения надо присылать на адрес dmitry.shabanov@phystech.edu