Задачи на различных олимпиадах.

Полянский Александр*

25 марта 2017 г.

Обозначения:

В	—	финал Всероссийской олимпиады;
ТГ	—	Турнир Городов;
М	—	Московская математическая олимпиада;
IMO	—	Международная математическая олимпиада;
ЮМТ	—	Южный математический турнир;
ММ	—	Математическое многоборье;
МГ	—	Московская геометрическая олимпиада;
ЖК	—	Журнал “Квант”;
Ш	—	финал геометрической олимпиады им. Шарыгина;
Ко	—	турнир Колмогорова;
Ту	—	Туймаада;
RMM	—	Romanian Masters of Mathematics;
hardcore!	—	действительно трудная задача (даже для профи);
like!	—	нравится.

1. (В 2007, 10.1) Куб $n \times n \times n$, где n — нечетно, обклеили по клеточкам полосками 1×2 в один слой. Докажите, что число согнутых полосок нечётно.

2. (В 2007, 11.2) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA, CB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Отрезок AA_1 вторично пересекает вписанную окружность в точке Q. Прямая l параллельна BC и проходит через A. Прямые A_1C_1 и A_1B_1 пересекают прямую l в точках P и R соответственно. Докажите, что $\angle PQR = \angle B_1QC_1$.

3. (В 2008, 10.6) В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, точка H — ортоцентр, точка O — центр описанной окружности, точка B_0 — середина стороны AC. Прямая BO пересекает сторону AC в точке P, а прямые BH и A_1C_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые HB_0 и PQ параллельны.

4. (МГ 2010, 10–11 классы, 4 задача) Из вершины A параллелограмма $ABCD$ опущены высоты AM на BC и AN на CD. Точка P — точка пересечения прямых BN и DM. Докажите, что прямые AP и MN перпендикулярны.

5. (В 2011, 10.6) Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях BB_1 и CC_1 его высот за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q так, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC – прямой.

* *e-mail*:alexander.polyanskii@yandex.ru

6. (7 ЮМТ, 2011, 4 тур, 6 задача) Пусть биссектриса угла B пересекают описанную окружность треугольника ABC и сторону AC в точках B_0 и B_1. Пусть I_a и I_c центры вневписанных окружностей, соответствующие вершинам A и C, точка X — точка пересечения B_0I_a и B_1I_c, точка Y — точка пересечения B_1I_a и B_0I_c. Докажите, что точки A, C, X, Y лежат на одной окружности.

7. (ТГ, весна 2012, основной тур, 8–9 классы, 5 задача) Пусть n — простое число. Набор из $n+2$ натуральных чисел (не обязательно различных) назовем «интересным», если сумма любых n из них делится на каждое из двух оставшихся чисел. Найдите все «интересные» наборы. (в задаче можно заменить простое число на произвольное натуральное)

8. (ТГ, устный тур 2012, 5 задача) Вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Вневписанная окружность касается стороны BC и продолжений сторон CA, AB в точках A_2, B_2, C_2. Через середины отрезков A_1B_1, A_2B_2 провели прямую l_1, а через середины отрезков A_1C_1, A_2C_2 провели прямую l_2. Докажите, что l_1 и l_2 пересекаются на высоте AH треугольника ABC.

9. (В 2012, 9.6) Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_a, I_b и I_c — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_aI_bI_c$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

10. (В 2012, 11.6) Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_a, O_b, O_c — центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $O_aO_bO_c$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

11. (ТГ, осень 2012, основной тур, 10–11 классы, 4 задача) На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки C_1 и A_1, отличные от вершин. Пусть K — середина A_1C_1, а I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Оказалось, что четырёхугольник A_1BC_1I вписанный. Докажите, что угол AKC — тупой.

12. (ММ 2012, геометрический тур, старшие, 4 задача) Дан неравнобедренный треугольник ABC. Центр вневписанной окружности треугольника, касающейся стороны BC треугольника, обозначим через I_a, а точку ее касания с этой стороной — через A_1. Аналогично определим точки I_b, B_1, I_c, C_1. Докажите, что описанные окружности треугольников AI_aA_1, BI_bB_1 и CI_cC_1 имеют две общие точки. (уже во время олимпиады выяснили, что это интерпретация теоремы Плюкерра)

13. (ММ 2012, устный командный тур, 10–11 классы, 6 задача) Узлом назовем точку, обе ее координаты которой — целые числа. Внутри треугольника ABC с вершинами в узлах расположено ровно $n > 0$ узлов. Какое наибольшее число узлов может находиться на стороне BC?

14. (**like!** ТГ, весна 2013, основной тур, 8–9 классы, 4 задача, 10–11 классы, 4 задача; М 2013, 8.5, 9.5) Узлом назовем точку, обе ее координаты которой — целые числа. Внутри треугольника ABC с вершинами в узлах расположено ровно $n \geqslant 2$ узлов. Докажите, что из этих n узлов можно выбрать два так, чтобы прямая, проходящая через них была параллельна одной из сторон, либо содержала вершину треугольника.

15. (совместно с Л. Емельяновым, В 2013, 10.7) Пусть вписанная окружность с центром I касается сторон треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1, а I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA и AB соответственно. Пусть I_aC_1 и I_cA_1 пересекаются в точке B_2. Аналогично построим точки C_2, A_2. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности (отличной от вписанной) с центром в точке I.

16. (ЖК №2 2013 г, статья "Одной рукой узелок не завяжешь") Узлом назовем точку, обе ее координаты которой — целые числа. Многоугольник назовем целым, если все его вершины — узлы. Строго внутри целого треугольника расположен целый выпуклый четырехугольник. Докажите, что внутри треугольника расположен по крайней мере ещё один узел, отличный от вершин четырехугольника.

17. (ЖК №2 2013 г, статья "Одной рукой узелок не завяжешь") Узлом назовем точку, обе ее координаты которой — целые числа. Центр описанной окружности O неравнобедренного остроугольного треугольника ABC с вершинами в узлах является узлом. Какое наименьшее число узлов может быть внутри этого треугольника ABC?

18. (**like!** IMO 2013, 3 задача) Пусть A_1, B_1, C_1 точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, CA, AB треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности около треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.

19. (Ш 2013, 10.6) Про четырехугольник $ABCD$ известно, что в него можно вписать окружность и то, что $AB = CD \neq BC$. Докажите, что угол AOB острый, где O — точка пересечения диагоналей этого четырехугольника.

20. (**hardcore!** Ко 2013, 2 тур, 2 задача) Про целые x, $y \neq 0$ при некотором нечетном простом q известно, что $x^2 = 8y^q + 1$. Докажите, что $y - 1$ кратно q.

21. (ТГ, весна 2014, тренировочный тур, 10–11 классы, 2 задача) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны. На сторонах AD и CD отмечены соответственно точки M и N так, что углы ABN и CBM прямые. Докажите, что прямые AC и MN параллельны.

22. (**like!** Ш 2014, 9.6) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, M, N — середины дуг ABC и BAC описанной окружности. Докажите, что точки M, I, N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $AC + BC = 3AB$.

23. (**like!** совместно с А. Купавским, Ту 2015, старшая лига, 8 задача) Пусть на плоскости отмечено $k(k+1)/2+1$. Некоторые из этих точек соединены друг с другом непересекающимися отрезками так, что эти отрезки не проходят через отмеченные точки. Оказалось, что плоскость разбилась на несколько параллелограммов и одну бесконечную часть. Какое наибольшее число отрезков могло быть проведено.

24. (**like!** 9th RMM 2017, 3 задача) Обозначим через n целое число больше 1, а X множество, состоящее из n элементов. Непустое семейство подмножеств $A_1, \ldots, A_k$ множества X называется *плотным*, если их объединение $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ является собственным подмножеством множества X и никакой из элементов из X не лежит в точности в одном из A_i. Найдите наибольшее размер такого семейства собственных непустых подмножеств X, что никакое подсемейство этого семейства не является плотным.